

Une première approche aux champs vectoriels combinatoires

Dominic Desjardins Côté

RÉSUMÉ Dans cet article, on définit une approche aux systèmes dynamiques combinatoires en utilisant les complexes simpliciaux et la théorie de Morse discrète selon Forman. De plus, on introduit quelques concepts pour étudier les systèmes dynamiques combinatoires.

1 Introduction

Depuis la dernière décennie, le concept de champ vectoriel combinatoire, introduit par Robin Forman en 1998, est devenu un outil très efficace pour la discrétisation des problèmes continus en mathématiques appliquées, en imagerie et la visualisation des systèmes dynamiques. Donc, on s'intéresse à discrétiser les systèmes dynamiques et, plus précisément, à faire des liens entre la théorie classique de Morse [Mat02] et la théorie de Morse discrète, selon Forman, dans le contexte des systèmes dynamiques. De plus, on veut être capable de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret sans modifier la dynamique du système et vice-versa. On débutera par une brève introduction aux systèmes dynamiques. Par la suite, on décrira les complexes simpliciaux [Jam84] qui est un espace topologique que nous utilisons pour appliquer le champ vectoriel combinatoire. Ensuite, on présentera la théorie de Morse discrète, selon Forman [Rob02, Rob98]. Pour finir, nous modifierons quelques définitions de la théorie de Morse discrète pour introduire le concept de système dynamique discret et quelques méthodes pour les étudier [TMT16] [BTMW16].

2 Les systèmes dynamiques

Tout d'abord, qu'est-ce qu'un système dynamique ? Ce qui nous intéresse ce sont les solutions $x(t, x_0)$ du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

où t est le temps et x_0 est la valeur initiale. Donc, on s'intéresse à voir l'évolution d'une valeur dans le temps. Cette valeur pourrait être la position d'un objet ou

Je remercie l'Institut des Sciences Mathématiques pour leur financement. Je remercie Tomasz Kaczynski pour m'avoir aidé dans mes travaux de recherche et pour son financement.

même des conditions météorologiques. Ainsi, pour simplifier, on définit $\varphi(t, x) : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ et on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi) \\ \varphi(0, x) = x \end{cases} .$$

Définition 2.1. Soient X un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ une fonction continue. Alors, φ est un *flot* ou un *système dynamique à temps continu* si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\varphi(0, x) = \text{Id}_x$;
2. $\varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$, pour tout t et s .

Donc, la première condition indique qu'au temps initial, on obtient la valeur initiale x_0 . Pour la deuxième, si on additionne les temps s et t , alors cela revient à la composition des fonctions aux temps s et t .

Ainsi, on se pose la question suivante : Que peut-on étudier sur un système dynamique ? D'abord, on peut s'intéresser aux futurs du système dynamique, c'est-à-dire $t \rightarrow \infty$, ou même aux passés du système quand $t \rightarrow -\infty$. De plus, on peut trouver les points d'attractions, les points répulsifs et vérifier s'il y a des cycles.

En outre, on peut discrétiser le temps du système dynamique. Ainsi, le flot devient $\varphi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$, qu'on appelle un système dynamique à temps discret. De plus, si $f : X \rightarrow X$ est donnée par $f(x) = \varphi_1(x)$, alors, on obtient : $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ compositions}}(x) = \varphi_1 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_1(x) = \varphi_n(x)$.

Donc, on remarque qu'il est simple de discrétiser le temps. Si on a la fonction f qui définit une unité de temps, alors on applique la fonction t fois pour obtenir le temps t . Par contre, il est plus complexe de discrétiser l'espace X , car si on ne fait pas attention à l'espace utilisé, alors on perd de l'information quand on discrétise un système continu. Ainsi, le but de cet article est de définir un système dynamique combinatoire ayant un temps et un espace discrétisés.

3 Les complexes simpliciaux

Tout d'abord, avant de définir les champs vectoriels combinatoires, nous devons définir l'espace topologique où nous allons appliquer le champ vectoriel combinatoire. Donc, on a besoin d'un espace géométrique qui a un aspect combinatoire, mais qui va permettre de garder l'information du système dynamique continu. Ainsi, on utilise l'espace des complexes simpliciaux. Avant de les définir, on a besoin de quelques concepts.

Définition 3.1. Un ensemble de points $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ dans \mathbb{R}^N , avec $n \leq N$, est *géométriquement indépendant*, si tous les scalaires t_i , pour $i = 0, 1, \dots, n$,

satisfont à :

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n t_i v_i = 0,$$

ce qui implique $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

Lemme 3.2. *Un ensemble $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ est géométriquement indépendant si et seulement si l'ensemble des vecteurs $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ est une famille linéairement indépendante dans le sens de l'algèbre linéaire.*

Démonstration. Soit un ensemble $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ géométriquement indépendant. On obtient :

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n t_i v_i = -t_0 v_0 \implies \sum_{i=1}^n t_i (v_i - v_0) = -\sum_{i=0}^n t_i v_0.$$

De plus, $\sum_{i=0}^n t_i = 0$. Par conséquent, on a que $\sum_{i=1}^n t_i (v_i - v_0) = 0$ et $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$. Donc, $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ est une famille linéairement indépendante.

Si $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$, alors on obtient

$$\sum_{i=1}^n t_i (v_i - v_0) = 0 \implies \sum_{i=1}^n t_i v_i - \sum_{i=1}^n t_i v_0 = 0.$$

Posons $t_0 = -\sum_{i=1}^n t_i$. De plus, $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ est une famille linéairement indépendante. Alors, $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$, ce qui entraîne que $t_0 = -\sum_{i=1}^n t_i = 0$. Donc, $\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0$ et $\sum_{i=0}^n t_i = -\sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n t_i = 0$. Ce qui implique que $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$. Ainsi, $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ est géométriquement indépendant. \square

Définition 3.3. Soit $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ un ensemble géométriquement indépendant dans \mathbb{R}^N . On définit un n -simplexe σ , un sous-espace engendré par les éléments v_0, v_1, \dots, v_n , qui est l'ensemble de tous les points $x \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i,$$

où $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ et $t_i \geq 0$ pour tout i .

Remarque 3.4. Les t_i de la définition précédente sont appelées les *coordonnées barycentriques* du point x de σ .

Proposition 3.5. *Les coordonnées barycentriques sont uniques.*

Démonstration. Supposons que les coordonnées barycentriques de x ne sont pas uniques. Alors, ils existent t_i et λ_i pour $i = 1, \dots, n$ telles que $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ avec $\sum_{i=0}^n t_i = 1$, $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $t_i \neq \lambda_i$ pour au moins un i . On obtient $0 = x - x = \sum_{i=0}^n (t_i - \lambda_i) v_i$ et $\sum_{i=0}^n (t_i - \lambda_i) = 1 - 1 = 0$. De plus, les v_i sont géométriquement indépendant, alors $t_i - \lambda_i = 0 \forall i$. Donc, les coordonnées barycentrique sont uniques. \square

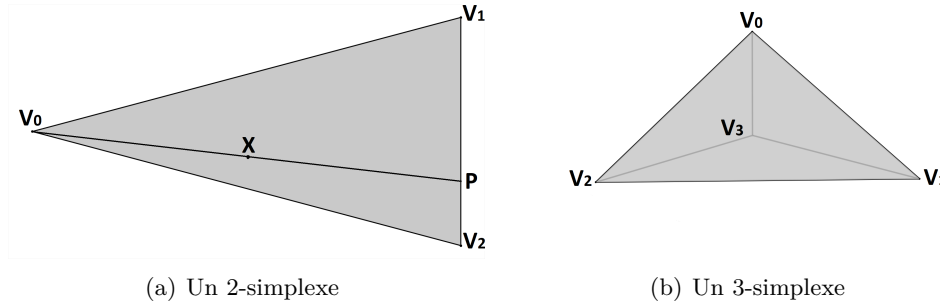


FIGURE 1 : Deux exemples de simplexes géométriques.

Exemple 3.6. Le 0-simplexe est engendré par v_0 . Comme $t_0 = 1$, alors le seul point est $x = v_0$. Donc, le 0-simplexe est un seul point.

Exemple 3.7. Le 1-simplexe, engendré par v_0 et v_1 , consiste en tous les points de la forme $x = t_0v_0 + t_1v_1$. Par contre, on a $t_0 + t_1 = 1$ impliquant que $t_1 = 1 - t_0$. On obtient $x = t_0v_0 + (1 - t_0)v_1$. Ainsi, le 1-simplexe est l'ensemble de tous les points entre v_0 et v_1 , qui est la ligne rejoignant les deux points x_0 et x_1 .

Exemple 3.8. Le 2-simplexe σ , engendré par v_0 , v_1 et v_2 , est l'ensemble des points $x = \sum_{i=0}^2 t_i v_i$. Donc, $t_0 + t_1 + t_2 = 1$ entraîne que $1 - t_0 = t_1 + t_2$. Si $t_0 \neq 1$, alors

$$\frac{1 - t_0}{1 - t_0} = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_0}.$$

Ainsi, $x = t_0v_0 + (1 - t_0) \left(\left(\frac{t_1}{1 - t_0} \right) v_1 + \left(\frac{t_2}{1 - t_0} \right) v_2 \right)$ représente un point entre v_0 et p , où p est le point entre v_1 et v_2 . Donc, le 2-simplexe est un triangle. Dans la Figure 1(a), le point x est aux valeurs de $t_0 = \frac{1}{2}$, $t_1 = \frac{1}{6}$ et $t_2 = \frac{1}{3}$.

Exemple 3.9. En suivant une démarche similaire du 2-simplexe, on montre que le 3-simplexe est un tétraèdre (voir Figure 1(b)).

Définition 3.10. Soit σ un n -simplexe avec les points $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$:

1. Les points v_0, v_1, \dots, v_n sont appelées les *sommets* ;
2. Le nombre n est la *dimension* d'un n -simplexe σ . On note $\sigma^{(p)}$ un simplexe de dimension p . De plus, on écrit seulement la dimension du simplexe lorsque nécessaire ;
3. Tous les sous-ensembles de $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ sont appelés les *faces*. En particulier, les faces différentes de σ sont les *faces propres*. De plus, on note $\tau < \sigma$ si τ est une face de σ ;
4. L'*adhérence* de σ est l'union de toutes les faces de σ , c'est-à-dire

$$\text{Cl } \sigma := \bigcup_{\tau < \sigma} \tau;$$

5. La *frontière* de σ est l'union de toutes les faces propres de σ . Elle est notée $\text{Bd } \sigma$;
6. L'*intérieur* de σ est défini par $\text{Int } \sigma = \sigma - \text{Bd } \sigma$.

Définition 3.11. Un *complexe simplicial* K dans \mathbb{R}^N est un ensemble de simplexes dans \mathbb{R}^N tel que :

1. Tous les faces d'un simplexe dans K est dans K ;
2. L'intersection de deux simplexes de K est une face pour chaque simplexe.

Exemple 3.12. Dans les Figures suivantes, on a que les Figures 2(a) et 2(b) sont des complexes simpliciaux. Par contre, les Figures 2(c) et 2(d) ne sont pas des complexes simpliciaux. Pour les Figures 2(c) et 2(d), la condition 2 n'est pas respectée, car l'intersection entre les deux triangles est une face pour le petit triangle, mais il n'est pas une face du grand triangle. Pour la condition 1, on veut que tous les simplexes aient leurs faces à l'intérieur du complexe simplicial. Dans le cas des complexes simpliciaux géométriques, cette condition est respectée. Par contre, dans le cas abstrait, on veut que tous les sous-simplexes des simplexes soient dans le complexe simplicial.

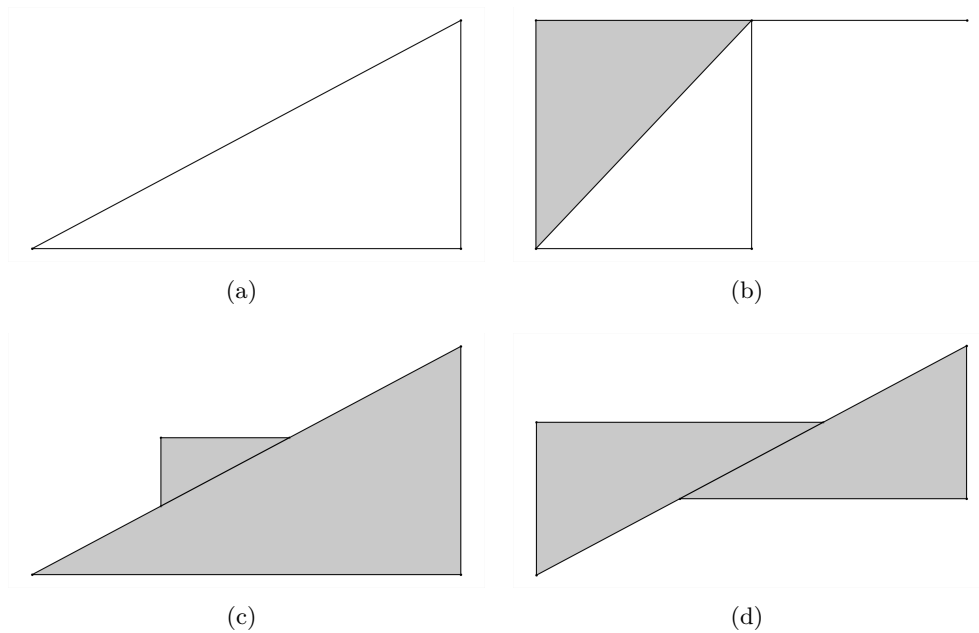


FIGURE 2 : Les Figures (a) et (b) sont des exemples de complexes simpliciaux. Les Figures (c) et (d) ne sont pas des complexes simpliciaux.

Ainsi, avec les complexes simpliciaux, on va définir un champ vectoriel combinatoire en utilisant la capacité combinatoire de cet espace. De plus, il est possible d'utiliser d'autres types d'espaces comme les complexes cubiques ou les complexes cellulaires.

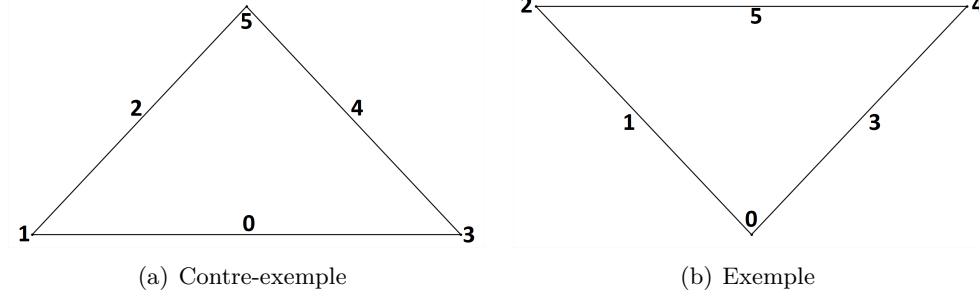


FIGURE 3 : La Figure (a) n'est pas une fonction de Morse discrète. La Figure (b) est une fonction de Morse discrète.

4 La théorie de Morse discrète

4.1 Les champs vectoriels combinatoires selon Forman

Dans cette section, on présente la théorie de Morse avec un point de vue combinatoire. Le but de la théorie de Morse est d'étudier la topologie des variétés différentielles à l'aide des lignes de niveaux d'une fonction et de ses points critiques. Plusieurs résultats importants permettant de mieux comprendre sa topologie comme l'inégalité de Morse. Pour cet article, nous allons voir une approche discrète de la théorie de Morse qui est amené par Robin Forman. Donc, nous allons voir une première esquisse des champs vectoriels combinatoire.

Définition 4.1. Soit K un complexe simplicial. Une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction de Morse discrète* si, pour tous $\alpha^{(p)} \in K$, il respecte les deux conditions suivantes :

1. $H_f(\alpha) := \text{card} \left(\left\{ \beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha) \right\} \right) \leq 1$;
2. $T_f(\alpha) := \text{card} \left(\left\{ \gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha) \right\} \right) \leq 1$.

Exemple 4.2. À la Figure 3(a), la fonction f n'est pas une fonction de Morse discrète, car le 0-simplexe σ de valeur 5 ne respecte pas la condition 1, avec $H_f(\sigma) = 2$. De plus, le 1-simplexe τ de valeur 0 ne respecte pas la condition 2, avec $T_f(\tau) = 2$. D'une autre part, la Figure 3(b) respecte les deux conditions. Alors, la fonction f est une fonction de Morse discrète.

Définition 4.3. Un simplexe $\alpha^{(p)}$ est *critique* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $H_f(\alpha) = 0$;
2. $T_f(\alpha) = 0$.

À noter, dans les figures, que les simplexes en rouge sont critiques.

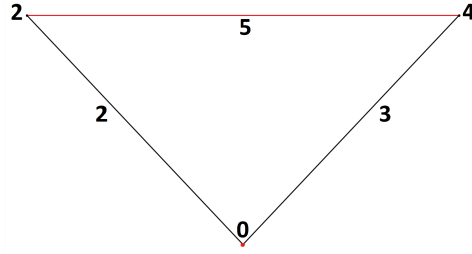


FIGURE 4 : Le 1-simplexe avec la valeur 5 et le 0-simplexe avec la valeur 0 sont critique.

Exemple 4.4. À la Figure 4, on a deux simplexes critiques. Plus précisément, il y a un 0-simplexe et un 1-simplexe. On remarque que le 0-simplexe représente un minimum local et le 1-simplexe représente un maximum local. Dans le cas général, le n -simplexe critique indique qu'il y a n directions descendantes. Donc, si le simplexe de dimension maximale dans le complexe simplicial est critique, alors c'est un maximum local. Pour le simplexe de dimension minimale, il est toujours de dimension 0 et il est un minimum local.

Lemme 4.5. Soit K un complexe simplicial avec une fonction de Morse f . Alors, pour tous les simplexes $\alpha^{(p)}$, soit $H_f(\alpha) = 0$ ou $T_f(\alpha) = 0$.

Démonstration. Par contradiction, supposons qu'il existe $\tau \in K$ tel que l'on ait $H_f(\tau) = 1$ et $T_f(\tau) = 1$. Donc, il existe $\sigma \in K$ tel que $\sigma > \tau$ et $f(\sigma) \leq f(\tau)$. De la même façon, il existe γ tel que $\gamma < \tau$ et $f(\gamma) \geq f(\tau)$. De plus, il existe $\tau' \in K$ tel que $\tau' \neq \tau$ et $\gamma < \tau' < \sigma$. On a que $f(\sigma) \leq f(\tau)$ et $f(\gamma) \geq f(\tau)$. Ainsi, on obtient que $f(\tau') < f(\sigma)$ et $f(\tau') > f(\gamma)$. Si $f(\tau') \geq f(\sigma)$, alors $T_f(\sigma) = 2$ ce qui est impossible, car f est une fonction de Morse discrète. De la même façon avec γ , on a que $f(\tau') > f(\gamma)$. Par conséquent, on obtient $f(\tau) \leq f(\gamma) < f(\tau') < f(\sigma) \leq f(\tau)$ d'où la contradiction. \square

Nous pouvons maintenant définir le champ vectoriel combinatoire selon Forman. Nous utilisons la règle suivante pour dessiner les flèches du champ vectoriel : Soit $\alpha^{(p)}$ une face de $\beta^{(p+1)}$ et $f(\beta) \leq f(\alpha)$, alors on dessine une flèche de α vers β .

À l'aide du lemme précédent, on a que α satisfait à seulement un de ces trois cas :

1. α est la queue d'une seule flèche ;
2. α est la tête d'une seule flèche ;
3. α n'est pas la tête ni la queue d'une flèche.

Remarque 4.6. Dans le cas 3, on a que α est un simplexe critique.

Maintenant, nous pouvons définir les champs vectoriels combinatoires.

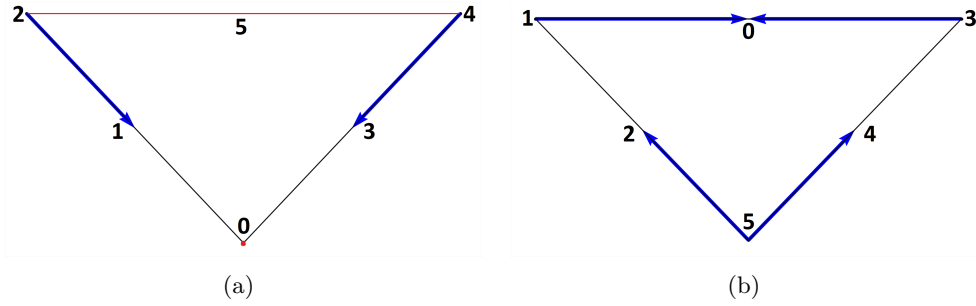


FIGURE 5 : Dans la Figure (a) sont les flèches dessinées avec une fonction de Morse discrète. Dans la Figure (b) sont les flèches dessinées avec une fonction qui ne satisfait pas la définition d'une fonction de Morse discrète.

Définition 4.7. Un *champ vectoriel combinatoire* V sur un complexe simplicial K est un ensemble de paires $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$ de simplexes dans K tel que chaque simplexe est au plus qu'une seule pair dans V .

Ainsi, si on a une fonction de Morse discrète sur un complexe simplicial, alors on est assuré d'avoir un champ vectoriel combinatoire bien défini. Par contre, on s'intéresse aussi au cas inverse. Donc, si on a un champ vectoriel combinatoire V avec les flèches définies plus haut, alors il existe une fonction de Morse discrète qui produit le même champ vectoriel combinatoire que V .

Remarque 4.8. Si le champ vectoriel combinatoire est définie par une fonction de Morse discrète, alors on dit que V est un champ vectoriel combinatoire gradient.

Définition 4.9. Un *v-chemin* est une suite de simplexe :

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)} \quad (1)$$

tel que pour chaque $i = 0, 1, \dots, r$, on a $\{\alpha_i < \beta_i\} \in V$ et $\beta_i > \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$.

Remarque 4.10. Si $r \geq 0$ et $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$, alors on dit que le v-chemin est un *v-chemin fermé non-trivial*.

Théorème 4.11. Soit V un champ vectoriel combinatoire gradient d'une fonction de Morse f . Alors, la suite (1) est un v-chemin si et seulement si $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ pour $i = 0, 1, \dots, r$ et

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots > f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}).$$

Démonstration. Soit une suite de simplexe qui est un v-chemin. Par la définition de v-chemin, on a $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ et $\{\alpha_i < \beta_i\} \in V$. On a aussi $\alpha_{i+1} \neq \alpha_i$, ce qui entraîne que $\{\alpha_{i+1} < \beta_i\} \notin V$. Alors, on obtient $f(\beta_i) > f(\alpha_{i+1}), \forall i$. De l'autre côté, si on a $\{\alpha_i < \beta_i\} \in V$, alors $f(\alpha_i) \geq f(\beta_i), \forall i$. Ainsi, on obtient la suite suivante : $f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots > f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1})$.

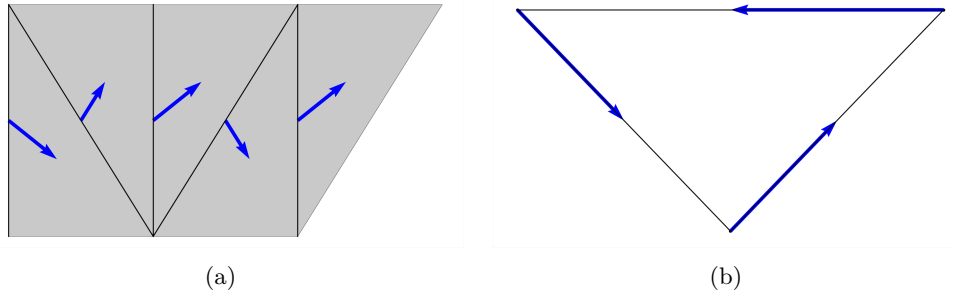


FIGURE 6 : La Figure (a) est un exemple de v-chemin. Le début du v-chemin est le 1-simplexe à l'extrémité à gauche et se termine au 2-simplexe à droite. La Figure (b) est un exemple de v-chemin fermé non-trivial

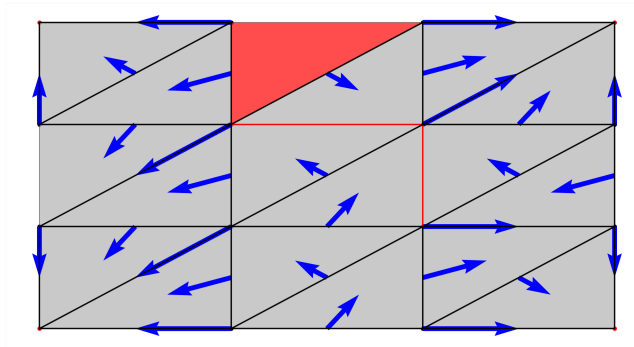


FIGURE 7 : C'est un exemple d'une fonction de Morse discrète sur un tore.

De l'autre côté, on considère une suite de simplexes telle que l'on a les inégalités $f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots > f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1})$. Si $f(\alpha_i) \geq f(\beta_i)$, alors on obtient $\{\alpha_i < \beta_i\} \in V$. De plus, si $f(\beta_i) > f(\alpha_{i+1})$, alors on a $\{\alpha_{i+1} < \beta_i\} \notin V$, ce qui entraîne que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Donc, la suite : $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}$ est un v-chemin. \square

Remarque 4.12. La fonction est décroissante le long du v-chemin.

Théorème 4.13. *Un champ vectoriel combinatoire V est un champ vectoriel gradient issu d'une fonction de Morse discrète si et seulement s'il ne possède aucun v-chemin fermé non-trivial.*

Nous allons démontrer ce résultat à la Section [4.2](#)

Exemple 4.14. La Figure [7](#) est un tore représenté dans \mathbb{R}^2 sur l'intervalle $[0,1] \times [0,1]$. Pour l'obtenir, il faut coller les côtés verticaux ensemble et les côtés horizontaux, c'est-à-dire, que les côtés opposés sont équivalents de cette manière : $(t,0) \sim (t,1)$ et $(0,t) \sim (1,t)$ pour $\forall t \in [0,1]$.

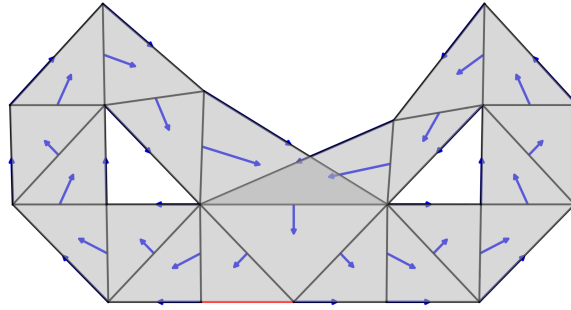


FIGURE 8 : C'est un exemple d'une fonction qui n'est pas une fonction de Morse discrète.



FIGURE 9 : C'est le diagramme de Hasse d'un complexe simplicial.

Exemple 4.15. À la Figure 8 on remarque qu'il existe des v -chemins fermés non-triviaux. Alors, la fonction ne génère pas un champ vectoriel produit par une fonction de Morse discrète. De plus, c'est un exemple combinatoire des attracteurs de Lorenz qui montre qu'il existe des comportements chaotiques.

4.2 Le diagramme de Hasse modifiée

Maintenant, transformons un complexe simplicial à un diagramme de Hasse et appliquons quelques modifications pour obtenir les mêmes informations qu'un champ vectoriel combinatoire.

D'abord, on construit le diagramme de Hasse à l'aide de la relation des faces de co-dimension 1 entre les simplexes, c'est-à dire qu'on trace une flèche ayant comme source le $(p - 1)$ -simplexe et comme destination le p -simplexe, si le p -simplexe est une face du $(p + 1)$ -simplexe. Donc, on obtient la Figure 9.

Ensuite, on utilise le champ vectoriel du complexe simplicial pour interchanger la source et la destination. S'il y a une flèche $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$, alors on inverse la flèche sur le diagramme de Hasse. Donc, si on applique cette procédure pour toutes les flèches du champ vectoriel, alors on obtient le diagramme de Hasse modifié.

Ainsi, avec le diagramme de Hasse modifié, on obtient la même information que des v -chemins à l'intérieur du champ vectoriel combinatoire, car, en suivant les chemins à l'intérieur du diagramme de Hasse modifié, on obtient les che-

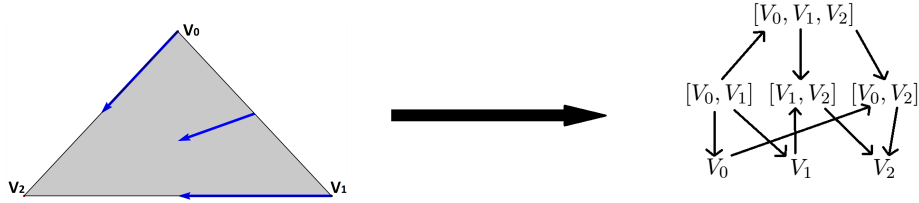


FIGURE 10 : C'est le diagramme de Hasse modifié d'une fonction de Morse discrète.

mins qui sont décroissants dans le graphe, comme les v -chemins dans le champ vectoriel combinatoire. Alors, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.16. *Il n'y a pas de v -chemin fermé non-trivial si et seulement s'il n'y a pas de chemin orienté non-trivial dans le diagramme de Hasse modifié.*

Donc, le Théorème [4.13](#) est équivalent à un théorème connu dans la théorie des graphes.

Théorème 4.17. *Soit \mathcal{G} un graphe orienté. Alors, il y a une fonction à valeur réelle qui est strictement décroissante le long des chemins orientés si et seulement s'il n'existe pas de cycle dans \mathcal{G} .*

Par exemple, on peut utiliser un algorithme de parcours en profondeur pour trouver s'il n'y a pas de cycle et on peut conclure si la fonction du champ vectoriel est un champ vectoriel combinatoire gradient issu d'une fonction de Morse discrète ou non.

Bref, on remarque que la théorie de Morse discrète de Forman utilise le complexe simplicial (on peut aussi utiliser le complexe cellulaire) et appliquer une fonction de Morse discrète pour obtenir un champ vectoriel combinatoire. Par contre, les définitions ne pourront pas être utilisées pour définir les systèmes dynamiques combinatoires.

5 Les systèmes dynamiques combinatoires

Dans la théorie de Morse discrète de Forman, on décrit seulement le champ vectoriel gradient, car dans la théorie de Morse continue, il y a un lien important entre le champ vectoriel gradient et la fonction de Morse. De plus, le v -chemin considère seulement les trajectoires de dimension p et $p+1$. Ainsi, dans notre cas, on veut étudier les systèmes dynamiques combinatoires. Alors, il faut généraliser la définition de champ vectoriel combinatoire et ajouter des concepts propres aux systèmes dynamiques, mais nous utiliserons l'intuition que nous avons vue dans les définitions précédentes. De plus, à l'aide de la décomposition de Morse, nous pourrons comprendre le dynamisme du système.

Définition 5.1. Soit K un complexe simplicial. Alors, $\mathcal{V} : K \rightarrow K$ est un *champ vectoriel combinatoire* si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout simplexe $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V}$, nous avons $\mathcal{V}(\sigma) = \sigma$ ou σ est une face de co-dimension 1 de $\mathcal{V}(\sigma)$;
2. $\text{Dom } \mathcal{V} \cup \text{Im } \mathcal{V} = K$;
3. $\text{Dom } \mathcal{V} \cap \text{Im } \mathcal{V} = \text{Fix } \mathcal{V}$, où $\text{Fix } \mathcal{V}$ est l'ensemble des points fixes du champ vectoriel combinatoire, c'est-à-dire les points critiques dans le cas du champ vectoriel combinatoire de Forman.

Autrement dit, la première condition signifie qu'on permet aux points fixes de ne pas bouger. De plus, on veut que les flèches du champ vectoriel pointent vers un simplexe de dimension supérieure à un. Pour la deuxième condition, on ne veut pas de simplexe qui ne soit ni un point fixe, ni la source d'une flèche et ni la destination d'une flèche. Pour la dernière, on veut seulement que les points fixes soient à l'intérieur de l'image du domaine. De plus, on ne veut pas qu'un simplexe soit la source et la destination de deux flèches.

Définition 5.2. Un *multiflot combinatoire* associé à un champ vectoriel combinatoire \mathcal{V} est défini par une multifonction $\Pi_{\mathcal{V}} : K \rightarrow K$

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma) := \begin{cases} \text{Cl } \sigma & \text{si } \sigma \in \text{Fix } \mathcal{V} \\ \text{Cl Bd } \sigma \setminus \{\mathcal{V}^{-1}(\sigma)\} & \text{si } \sigma \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Fix } \mathcal{V} \\ \{\mathcal{V}(\sigma)\} & \text{si } \sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Fix } \mathcal{V} \end{cases} .$$

Exemple 5.3. À la Figure [11](#), soit $\sigma_1 = [V_2, V_3, V_5] \in \text{Fix } \mathcal{V}$, alors

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_1) = \{[V_2], [V_3], [V_5], [V_2, V_3], [V_3, V_5], [V_2, V_5], [V_2, V_3, V_5]\} .$$

Soit $\sigma_2 = [V_1, V_2, V_3] \in \text{Im } \mathcal{V}$, alors

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_2) = \{[V_1, V_3], [V_1, V_2], [V_1], [V_2], [V_3]\} .$$

Soit $\sigma_3 = [V_4, V_6] \in \text{Dom } \mathcal{V}$, alors

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_3) = \{[V_4, V_5, V_6]\} .$$

Maintenant, nous pouvons définir un chemin à l'aide du multiflot combinatoire. On remarque que c'est une généralisation du v -chemin. Il est maintenant possible de faire un chemin contenant des simplexes de plusieurs dimensions, tandis que le v -chemin pouvait seulement contenir les simplexes de dimensions p et $p + 1$ pour $p \geq 0$. De plus, le v -chemin ne pouvait pas posséder de point critique sauf pour le dernier simplexe de la suite du v -chemin.

Définition 5.4. Une *solution* d'un multiflot combinatoire $\Pi_{\mathcal{V}}$, aussi appelée orbite, d'un champ vectoriel combinatoire \mathcal{V} est une fonction $\varrho : I \rightarrow K$ tel que I est un intervalle dans \mathbb{Z} et $\varrho_{i+1} \in \Pi_{\mathcal{V}}(\varrho_i)$ pour $i, i + 1 \in I$. De plus, c'est une *solution complète* si $I = \mathbb{Z}$.

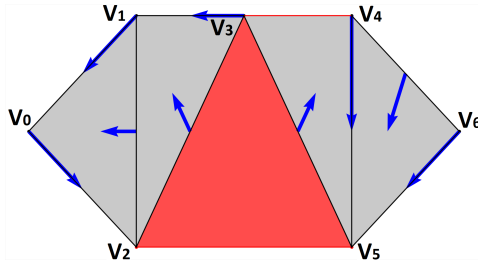


FIGURE 11 : C'est un exemple d'un champ vectoriel combinatoire.

Exemple 5.5. Dans la Figure 11, on a une solution : $[V_2, V_3, V_5] \rightarrow [V_3, V_5] \rightarrow [V_3, V_4, V_5] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_4] \rightarrow [V_4, V_5] \rightarrow [V_5]$ où l'intervalle est $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Maintenant, on aimerait étudier ces systèmes dynamiques combinatoires plus en profondeur. Plus précisément, on voudrait connaître les zones du système dynamique tel que les solutions convergent vers une zone ou même les solution complète qu'ils demeurent entièrement à l'intérieur d'une zone. C'est une manière de mieux comprendre le comportement des systèmes dynamiques.

Définition 5.6. Soit \mathcal{V} un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial K . Alors, un ensemble $S \subset K$ est un *invariant* associé à un multiflot $\Pi_{\mathcal{V}}$, si pour chaque simplexe $\sigma \in S$, il existe une solution complète $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow K$ passant par σ telle qu'elle est complètement contenu dans S .

Exemple 5.7. À la Figure 11, $S = \{[V_5], [V_2, V_5], [V_2, V_3, V_5], [V_3, V_5], [V_3, V_4, V_5], [V_3, V_4]\}$ est un invariant, car il y a une solution complète pour chaque simplexe. $\varrho_1 : \dots \rightarrow [V_2, V_3, V_5] \rightarrow [V_2, V_3, V_5] \rightarrow [V_3, V_5] \rightarrow [V_3, V_4, V_5] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow \dots$ et $\varrho_2 : \dots \rightarrow [V_2, V_5] \rightarrow [V_2, V_5] \rightarrow [V_5] \rightarrow [V_5] \rightarrow [V_5] \rightarrow \dots$. Les deux solutions complètes restent complètement dans S et ils atteignent tous les simplexes de S . Ainsi, S est un invariant.

Définition 5.8. Soient \mathcal{V} un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial K et $S \subset K$ un ensemble invariant pour un multiflot $\Pi_{\mathcal{V}}$. Définissons l'ensemble des sorties de S par :

$$\text{Ex } S := \text{Cl } S \setminus S.$$

Alors, S est un *invariant isolé* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'ensemble des sorties $\text{Ex } S$ est fermé dans K ;
2. Il n'existe pas de solution $\varrho : [-1, 1] \cap \mathbb{Z} \rightarrow K$ de $\Pi_{\mathcal{V}}$ tel que $\varrho(-1) \in S$, $\varrho(1) \in S$ et $\varrho(0) \in \text{Ex } S$.

La deuxième condition signifie qu'on ne veut pas avoir de trajectoires tangentes à l'intérieur de l'invariant isolé, c'est-à-dire qu'on ne veut pas qu'un point,

en un temps t , soit dans $\text{Ex } S$ et que les points aux temps $t + 1$ et $t - 1$ soient dans l'invariant isolé. Cette définition est une adaptation, dans un point de vue combinatoire, du cas continu.

Exemple 5.9. À la Figure [11](#), soit $S_1 = \{[V_2, V_3V_5], [V_2, V_5], [V_2], [V_5]\}$. Alors, $\text{Ex } S_1 = \{[V_2, V_3], [V_3, V_5], [V_3]\}$ et $\text{Cl Ex } S_1 = \{[V_2, V_3], [V_3, V_5], [V_3], [V_5], [V_2]\}$ et on obtient $\text{Cl Ex } S_1 \neq \text{Ex } S_1$. Donc, S_1 n'est pas un invariant isolé.

Soit $S_2 = \{[V_4], [V_5], [V_3, V_4], [V_4, V_5]\}$. Alors, on a que $\text{Ex } S_2 = \{[V_3]\}$ et également que $\text{Cl Ex } S_2 = \{[V_3]\} = \text{Ex } S_2$. Donc, la première condition est satisfaite. De plus, il n'existe pas de solution complète ϱ telle que $\varrho(-1) \in S_2$, $\varrho(1) \in S_2$ et $\varrho(0) \in \text{Ex } S_2$. Ainsi, S_2 est un invariant isolé.

Cette approche de trouver des invariants isolés n'est pas toujours évidente, car il est parfois difficile de démontrer qu'il n'existe pas de solution complète contenue complètement dans le complexe simplicial pour chaque simplexe de l'invariant isolé. Alors, on va définir de nouveaux simplexes permettant d'avoir une meilleure approche combinatoire.

Définition 5.10. Définissons les simplexes suivants :

$$\sigma^+ := \begin{cases} \mathcal{V}(\sigma) & \text{si } \sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \\ \sigma & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma^- := \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \\ \mathcal{V}^{-1}(\sigma) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le simplexe σ^- est la source et le simplexe σ^+ est la destination de la flèche associée à σ . Donc, si σ n'est pas la source ou la destination, alors, selon le cas, σ^+ ou σ^- est égale à σ .

Lemme 5.11. *Soit \mathcal{V} un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial K . Alors, pour un simplexe arbitraire $\sigma \in K$, on a que $\sigma^- \subset \sigma \subset \sigma^+$ et au moins une des inclusions est une égalité.*

Démonstration. Si $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V}$, alors $\sigma^+ = \mathcal{V}(\sigma)$. Mais, par la Définition [5.1](#) de champ vectoriel combinatoire \mathcal{V} , on a que $\mathcal{V}(\sigma) = \sigma$ ou σ est une face de co-dimension 1 de $\mathcal{V}(\sigma)$. Cela implique que $\sigma \subseteq \mathcal{V}(\sigma)$. De plus, on a $\sigma^- = \sigma$. Ainsi, on obtient $\sigma = \sigma^- = \sigma \subseteq \sigma^+ = \mathcal{V}(\sigma)$.

Si $\sigma \notin \text{Dom } \mathcal{V}$, alors $\sigma^+ = \sigma$ et $\sigma^- = \mathcal{V}^{-1}(\sigma)$. Mais par la définition de champ vectoriel combinatoire \mathcal{V} , $\mathcal{V}^{-1}(\sigma) = \sigma$ ou $\mathcal{V}^{-1}(\sigma)$ est une face de co-dimension 1 de σ , ce qui implique que $\mathcal{V}^{-1}(\sigma) \subseteq \sigma$. Ainsi, $\mathcal{V}^{-1}(\sigma) = \sigma^- \subseteq \sigma = \sigma^+ = \sigma$. Donc, on obtient au moins une égalité dans les deux cas. \square

Dans le cas des points fixes, on obtient $\sigma^- = \sigma = \sigma^+$.

Lemme 5.12. *Soit \mathcal{V} un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial K et S un invariant isolé d'un multiflot combinatoire $\Pi_{\mathcal{V}}$. Alors, pour tous les simplexes $\sigma \in K$, on a que $\sigma^+ \in S$ si et seulement si $\sigma^- \in S$.*

En d'autres mots, on veut que σ^+ et σ^- soient à l'intérieur ou à l'extérieur de l'invariant isolé.

Démonstration. [TMT16, Lemme 3.6, p.12] Tout d'abord, si $\sigma \in \text{Fix } \mathcal{V}$, alors $\sigma = \sigma^+ = \sigma^-$. Donc, le résultat est trivial à l'aide du Lemme 5.11.

Supposons que $\sigma \notin \text{Fix } \mathcal{V}$. Alors, on a $\sigma^+ \neq \sigma^-$, et par la Définition 5.10 de σ^+ et σ^- , on obtient que $\mathcal{V}(\sigma^-) = \sigma^+$.

Soit $\sigma^- \in S$. On a que S est un invariant isolé. Alors, il existe une solution complète $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow S$ telle que $\sigma^- = \varrho(\sigma)$. Par le multiflot combinatoire $\Pi_{\mathcal{V}}$, on obtient $\varrho(1) \in \Pi_{\mathcal{V}}(\varrho(0)) = \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma^-)$. Si $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V}$, alors $\sigma^- = \sigma$. Donc $\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma^-) = \{\mathcal{V}(\sigma^-)\} = \sigma^+$. Sinon, $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V}$. Alors, $\sigma^- = \mathcal{V}^{-1}(\sigma) \in \text{Dom } \mathcal{V}$. Donc, $\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma^-) = \Pi_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}^{-1}(\sigma)) = \sigma = \sigma^+$. Ainsi, $\sigma^+ = \varrho(1) \in S$.

De l'autre côté, soit $\sigma^+ \in S$. De la même manière, S est un invariant isolé, alors il existe une solution $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow S$ telle que $\sigma^+ = \varrho(0)$. Soit $\tau = \varrho(-1)$. On obtient $\sigma^+ = \varrho(0) \in \Pi_{\mathcal{V}}(\varrho(-1)) = \Pi_{\mathcal{V}}(\tau)$. On a deux cas à vérifier.

Pour le premier cas, si $\tau \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Fix } \mathcal{V}$, alors, $\Pi_{\mathcal{V}}(\tau) = \{\mathcal{V}(\tau)\}$ et $\sigma^+ = \mathcal{V}(\tau)$. Donc $\sigma^- = \tau \in S$.

Pour le deuxième cas, supposons que $\tau \notin \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Fix } \mathcal{V}$. D'abord, on a que si $\sigma \notin \text{Fix } \mathcal{V}$, alors $\sigma^+ \notin \text{Fix } \mathcal{V}$. Donc, $\sigma^+ < \tau$ est une face de co-dimension 1. De plus, si on a que $\sigma^- = \mathcal{V}^{-1}(\sigma^+)$, alors $\sigma^- < \sigma^+$ est une face de co-dimension 1 de même que pour τ . Ainsi, $\sigma^- \in \Pi_{\mathcal{V}}(\tau)$, car les deux images possibles du multiflot combinatoire contiennent tous les simplexes et toutes ses faces.

On construit $\phi : [-1, 1] \cap \mathbb{Z} \rightarrow K$, en posant $\phi(-1) := \tau$, $\phi(0) := \sigma^-$ et $\phi(1) := \sigma^+ \in S$, alors ϕ est une solution de $\Pi_{\mathcal{V}}$. Comme S est un invariant isolé et $\sigma^- \in \text{Cl } \sigma^+$ par la Définition 5.8, ainsi $\sigma^- \in S$. \square

À l'aide de ce lemme, nous pouvons alléger la définition d'invariant isolé (plus précisément la deuxième condition) pour faciliter la recherche d'invariant isolé. Nous allons admettre la prochaine proposition sans démonstration.

Proposition 5.13. *Un invariant S est un invariant isolé s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *L'ensemble des sorties $\text{Ex } S$ est fermé dans le complexe simplicial K ;*

2. *Pour tous simplexes $\sigma \in K$, on a que $\sigma^- \in S$ si et seulement si $\sigma^+ \in S$.*

Exemple 5.14. À la Figure 12, soient $S_1 = \{[V_4], [V_1, V_4], [V_4, V_6], [V_1, V_6], [V_1, V_4, V_6], [V_1, V_2, V_6]\}$ et $S_2 = \{[V_0], [V_0, V_1], [V_0, V_2], [V_0, V_3], [V_0, V_1, V_2], [V_0, V_2, V_3]\}$ et vérifions, à l'aide de la Proposition 5.13 si S_1 et S_2 sont des invariants isolés.

Pour S_1 , on a $\text{Ex } S_1 = \{[V_1], [V_2], [V_6], [V_1, V_2], [V_2, V_6]\} = \text{Cl Ex } S$. Alors, la condition 1 est satisfaite. Calculons σ^+ et σ^- de $[V_6, V_4]$. On a $\sigma^+ = [V_6, V_4] \in S$ et $\sigma^- = [V_6] \notin S$. Alors la deuxième condition n'est pas satisfaite. Donc, S_1 n'est pas un invariant isolé.

Pour S_2 , on a $\text{Ex } S_2 = \{[V_1], [V_2], [V_3], [V_1, V_2], [V_2, V_3]\} = \text{Cl Ex } S_2$. Alors, la condition 1 est satisfaite. Calculons les σ^+ et σ^- de S_2 .

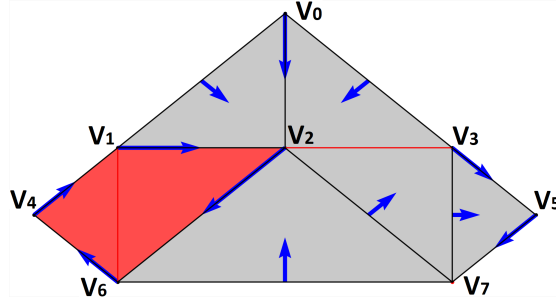


FIGURE 12 : C'est un exemple pour vérifier qu'un ensemble est un invariant isolé en utilisant la Proposition [5.13](#).

$$\begin{array}{lll}
 \sigma_1 = [V_0], & \sigma_1^+ = [V_0, V_2] \in S_2 & \text{et } \sigma_1^- = [V_0] \in S_2 \\
 \sigma_2 = [V_0, V_1], & \sigma_2^+ = [V_0, V_1, V_2] \in S_2 & \text{et } \sigma_2^- = [V_0, V_1] \in S_2 \\
 \sigma_3 = [V_0, V_2], & \sigma_3^+ = [V_0, V_2] \in S_2 & \text{et } \sigma_3^- = [V_0] \in S_2 \\
 \sigma_4 = [V_0, V_3], & \sigma_4^+ = [V_0, V_2, V_3] \in S_2 & \text{et } \sigma_4^- = [V_0, V_3] \in S_2 \\
 \sigma_5 = [V_0, V_1, V_2], & \sigma_5^+ = [V_0, V_1, V_2] \in S_2 & \text{et } \sigma_5^- = [V_0, V_1] \in S_2 \\
 \sigma_6 = [V_0, V_2, V_3], & \sigma_6^+ = [V_0, V_2, V_3] \in S_2 & \text{et } \sigma_6^- = [V_0, V_3] \in S_2
 \end{array}$$

Donc, S_2 est un invariant isolé.

Ainsi, cette proposition nous permet d'avoir une meilleure méthode pour calculer les invariants isolés qui reflètent mieux la philosophie de la combinatoire, car de prouver qu'il n'existe pas de solution complète peut être très complexe et fastidieux quand l'invariant qu'on vérifie a une très grande quantité de simplexes. Donc, pour chaque simplexe, on doit seulement vérifier σ^+ et σ^- , qui consiste en deux calculs simples et on a seulement besoin de savoir si σ est dans le domaine ou dans l'image du champ vectoriel combinatoire.

Maintenant qu'on a une méthode simple pour calculer les invariants isolés, on aimerait comprendre l'interaction entre les invariants isolés dans le système dynamique. D'abord, on a besoin de comprendre le comportement des solutions complètes dans le futur et dans le passé, c'est-à-dire quand le temps tend à l'infini ou à moins l'infini.

Définition 5.15. Soit $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow K$ une solution complète d'un multiflot combinatoire $\Pi_{\mathcal{V}}$. On définit les deux ensembles limites suivants :

1. L'ensemble α -limite de la solution complète ϱ est :

$$\alpha(\varrho) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \{\varrho(k) \mid k \leq n\}.$$

2. L'ensemble ω -limite de la solution complète ϱ est :

$$\omega(\varrho) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \{\varrho(k) \mid k \geq n\}.$$

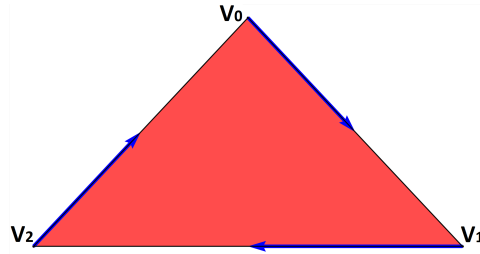


FIGURE 13 : C'est un exemple de calcul des ensembles α -limite et ω -limite.

Cette notion d'ensemble limite vient de la dynamique classique. Par contre, pour le contexte de la dynamique combinatoire, tenant compte du fait que l'intersection est prise sur une famille décroissante d'un nombre fini des ensembles, les ensembles α -limite et ω -limite sont atteints dans un temps entier fini. Par exemple, ces ensembles peuvent être des simplexes critiques répulsifs pour l'ensemble α -limite, des simplexes critiques attractifs pour l'ensemble ω -limite ou des trajectoires cycliques.

Exemple 5.16. À la Figure 13 soit ϱ la solution complète suivante : $\varrho(\mathbb{Z}) = \dots \rightarrow [v_0, v_1, v_2] \rightarrow [v_0, v_1, v_2] \rightarrow [v_0, v_1, v_2] \rightarrow [v_0] \rightarrow [v_0, v_1] \rightarrow [v_1] \rightarrow [v_1, v_2] \rightarrow [v_2] \rightarrow [v_2, v_0] \rightarrow [v_0] \rightarrow [v_0, v_1] \rightarrow [v_1] \rightarrow \dots$. Donc, on obtient les ensembles limites de cette solution complète :

$$\alpha(\varrho) = \{[v_0, v_1, v_2]\} \text{ et}$$

$$\omega(\varrho) = \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_0, v_2]\}.$$

Ainsi, on a tous les ingrédients nécessaires pour définir la décomposition de Morse. Cette décomposition nous permettra de diviser le complexe simplicial en invariant isolé et de comprendre à l'intérieur de quel invariant isolé proviennent les solutions complètes ou l'avenir des solutions complètes.

Définition 5.17. Soit S un ensemble contenant des ensembles invariants isolés de $\Pi_{\gamma} : K \rightarrow K$. On dit qu'une famille $\mathcal{M} := \{\mathcal{M}_i \mid i \in \mathbb{I}\}$, indexé par un ensemble partiellement ordonné \mathbb{I} , est une *décomposition de Morse de S* si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Les éléments de \mathcal{M} sont mutuellement disjoints et des sous-ensembles invariants isolés de S ;
2. Pour toutes les solutions complètes ϱ contenues dans K , il existe $r, r' \in \mathbb{I}$, $r \leq r'$, tel que $\alpha(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_{r'}$ et $\omega(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_r$;
3. Si pour une solution complète quelconque ϱ contenu dans K et $r \in \mathbb{I}$, on obtient que $\alpha(\varrho) \cup \omega(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_r$, alors $\text{Im } \varrho \subseteq \mathcal{M}_r$.

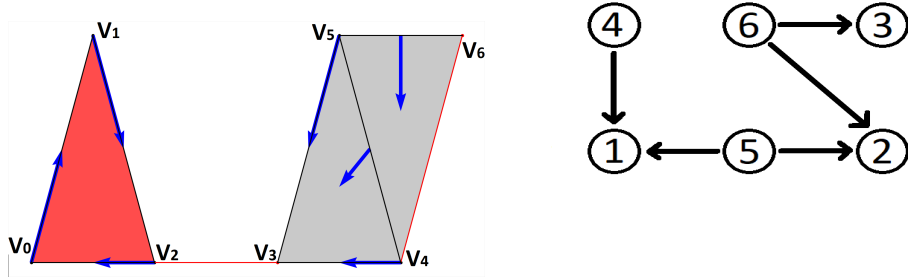


FIGURE 14 : C'est un champ vectoriel combinatoire avec son graphe de Morse.

La première condition signifie qu'on veut que les invariants isolés soient disjoints pour mieux comprendre la source et la destination des solutions complètes. La deuxième condition décrit l'interaction des ensembles limites d'une solution complète entre les invariants isolés. La troisième condition décrit les solutions complètes qui sont complètement contenues dans un invariant isolé. De plus, on veut que si une solution complète sort d'un invariant isolé, alors la solution complète doit se rendre à un autre invariant isolé et elle doit absolument converger dans cet invariant isolé.

Avec ces données, on peut maintenant construire un graphe de Morse permettant de visualiser le dynamisme du système. On a que les noeuds du graphe sont les invariants isolés. Les arêtes du graphe sont orientées et elles sont construites à l'aide de la deuxième condition de la Définition 5.17 de cette manière : s'il existe une solution complète qui satisfait la condition, alors on dessine une arête orientée ayant comme source $\mathcal{M}_{r'}$ et comme destination \mathcal{M}_r .

Exemple 5.18. À la Figure 14, on obtient la décomposition de Morse avec les invariants isolés suivants : $\mathcal{M}_4 = \{[V_0, V_1, V_2]\}$, $\mathcal{M}_1 = \{[V_0], [V_1], [V_2], [V_0, V_1], [V_1, V_2], [V_0, V_2]\}$, $\mathcal{M}_5 = \{[V_2, V_3]\}$, $\mathcal{M}_2 = \{[V_3]\}$, $\mathcal{M}_3 = \{[V_6]\}$ et $\mathcal{M}_6 = \{[V_4, V_6]\}$. De plus, on a les trajectoires suivantes entre les invariants isolés : $\mathcal{M}_4 \rightarrow \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_5 \rightarrow \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_5 \rightarrow \mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_3$. Donc, on a que cette décomposition respecte les conditions de la décomposition de Morse. De plus, remarquons qu'il y a trois ensembles attractifs (\mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3). D'autre part, les ensembles (\mathcal{M}_4 , \mathcal{M}_5 et \mathcal{M}_6) sont répulsifs quand la solution complète sort de l'invariant isolé.

En résumé, cette décomposition de Morse nous permet de comprendre le dynamisme du multiflot combinatoire associé aux champs vectoriels combinatoires. Plus précisément, on peut prédire les avenir possibles des solutions en connaissant l'existence des zones attractives, des zones répulsives et les liens entre eux.

Pour finir, nous avons vu une généralisation de la définition de champ vectoriel combinatoire et des v -chemins dans la théorie de Morse discrète selon Forman. À l'aide de cette intuition, cela nous a permis de définir le concept de systèmes dynamiques combinatoires et le multiflot combinatoire. Ensuite, nous

avons défini les solutions pour pouvoir comprendre les trajectoires à l'intérieur du système dynamique. Par la suite, on a introduit les invariants isolés qui ont permis de décrire la décomposition de Morse pour mieux comprendre la dynamique d'un système.

6 Conclusion

On a vu une approche aux systèmes dynamiques combinatoires en utilisant un espace construit par des complexes simpliciaux et en s'inspirant de la théorie de Morse discrète de Forman. De plus, on a défini les orbites d'un système dynamique discret et ses invariants. Par la suite, on a défini la décomposition de Morse pour décrire le dynamisme du système. Il y a encore quelques problèmes que nous n'avons pas considérés. Tout d'abord, il y a d'autres types de champ vectoriel. Il y a les champs multi-vecteurs, c'est-à-dire qu'il pourrait avoir plusieurs vecteurs partant de la même source et destination. De plus, on a seulement considéré des fonctions ayant une image dans \mathbb{R} , alors qu'on pourrait considérer les fonctions $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$. En outre, il reste d'autres concepts à définir dans les systèmes dynamiques pour les champs vectoriels. Plus précisément, pour la décomposition de Morse, on peut calculer les indices de Conley sur les invariants isolés pour davantage comprendre le système dynamique. De plus, on peut construire un flot F semi-continu fortement supérieur ayant le même dynamisme que le système dynamique discret défini par le multiflot combinatoire. Ainsi, les systèmes dynamiques combinatoires sont utiles pour expliquer plusieurs phénomènes combinatoires avec la puissance de l'informatique augmentant jour après jour.

Références

- [BTMW16] Batko BOGDAN, Kaczynski TOMASZ, Mrozek MARIAN et Thomas WANNER : Linking Combinatorial and Classical Dynamics : Conley Index and Morse Decompositions. *preprint arXiv :1710.05802 [math.DS]*, page 43, 2016.
- [Jam84] R. Munkres JAMES : *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, Cambridge, 1984.
- [Mat02] Yukio MATSUMOTO : *An Introduction to Morse Theory*. American Mathematical Society, États-Unis, 2002.
- [Rob98] Forman ROBIN : Morse Theory for Cell Complexes. *Advances in Mathematics*, 134(AI971650):90–145, 1998.
- [Rob02] Forman ROBIN : A User's Guide to Discrete Morse Theory. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 48(B48c):35, 2002.

- [TMT16] Kaczynski TOMASZ, Mrozek MARIAN et Wanner THOMAS : Towards a Formal Tie Between Combinatorial and Classical Vector Field Dynamics. *Journal of Computational Dynamics*, 3(1):17–50, 2016.

DOMINIC DESJARDINS CÔTÉ
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: dominic.desjardins.cote@usherbrooke.ca