

Géométrie hyperbolique : le demi-plan de Poincaré

Kevin Thouin

Reçu le 2017-01-11 et accepté le 2017-05-25

RÉSUMÉ Cet article traite de la géométrie hyperbolique de dimension 2. Il sera question du modèle du demi-plan de Poincaré. Après avoir correctement défini et décrit les droites hyperboliques du demi-plan de Poincaré, nous trouverons un groupe de transformations envoyant ces droites hyperboliques vers d'autres droites hyperboliques. Ensuite, on définira une métrique, qui nous permettra de définir les notions de longueur d'un chemin et de distance entre deux points de demi-plan de Poincaré. Finalement, à l'aide d'une courte introduction à la trigonométrie en géométrie hyperbolique, nous montrerons un résultat qui montre une particularité de la géométrie hyperbolique par rapport à la géométrie euclidienne usuelle.

1 Introduction

Pour introduire la géométrie hyperbolique, il est naturel de parler du cinquième postulat d'Euclide. Celui-ci stipule que si nous avons une droite et un point à l'extérieur de cette droite, alors il existe une seule droite parallèle à la première et passant par le point. Dans la géométrie hyperbolique, au contraire, il existe une infinité de telles droites. Nous ne parlerons, par contre, pas de parallélisme dans cet article.

Il existe plusieurs façons de représenter cette géométrie. Dans cet article, nous la représenterons par le demi-plan de Poincaré. Le livre [And05], qui sera notre principale référence, présente d'autres de ces modèles sans être exhaustif. En particulier, il généralise le demi-plan de Poincaré à tout autre demi-plan ou disque.

2 Définitions et généralités

Cette section introduit le demi-plan de Poincaré, un exemple de géométrie hyperbolique. On discutera aussi de la sphère de Riemann.

Définition 2.1. On définit le demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

J'aimerais remercier Virginie Charette pour ses commentaires lors de la rédaction de cet article.

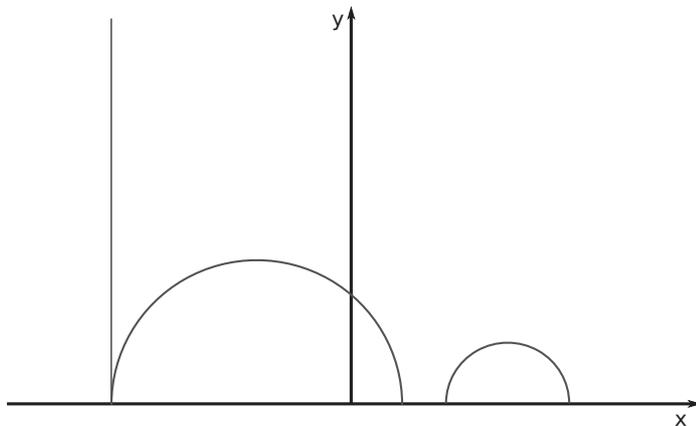


Figure 1 – Trois exemples de droites hyperboliques. Ils ne contiennent pas de points sur l’axe des x comme l’indique la définition.

C’est dans cet ensemble que nous allons définir la géométrie hyperbolique dans cet article. On peut y définir des figures analogues aux droites euclidiennes.

Définition 2.2. On appelle droite hyperbolique tout sous-ensemble de \mathcal{H} satisfaisant une des deux conditions suivantes :

- L’intersection de \mathcal{H} et d’une droite euclidienne verticale dans \mathbb{C} ;
- L’intersection de \mathcal{H} et d’un cercle euclidien centré sur un nombre réel dans \mathbb{C} .

La figure 1 donne trois exemples de droites hyperboliques. La définition d’une droite peut sembler étrange, car elle peut faire intervenir deux objets différents. Toutefois, il est possible d’unifier ces deux concepts comme nous le verrons.

Définition 2.3. La sphère de Riemann est $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

La sphère de Riemann est donc le plan complexe muni d’un point additionnel noté ∞ .

Il est possible de définir des notions d’ensembles ouverts et fermés ainsi que de continuité d’une fonction de $\widehat{\mathbb{C}}$ vers $\widehat{\mathbb{C}}$. Toutefois, nous ne ferons pas ces constructions dans cet article.

Définition 2.4. On appelle cercle généralisé tout sous-ensemble de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui est soit un cercle dans \mathbb{C} , soit $l \cup \{\infty\}$ où l est une droite euclidienne dans \mathbb{C} .

Proposition 2.5. On peut obtenir une paramétrisation unifiée pour les cercles généralisés. Ils vérifient :

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \quad \text{où } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{C}.$$

De plus, il s’agit d’une droite si, et seulement si $\alpha = 0$.

Démonstration.

- Pour les droites on pose $x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \operatorname{Im}(z) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$ et on remplace dans l'équation $ax + by + c = 0$ pour obtenir :

$$\frac{a - bi}{2}z + \frac{a + bi}{2}\bar{z} + c = 0,$$

qui est de la forme désirée avec $\alpha = 0$, $\beta = \frac{a-bi}{2}$ et $\gamma = c$.

- Pour les cercles, on développe l'équation $|z - z_0|^2 - r^2 = 0$ pour obtenir :

$$\bar{z}z - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + (|z_0|^2 - r^2) = 0,$$

qui est de la forme désirée avec $\alpha = 1$, $\beta = -\bar{z}_0$ et $\gamma = |z_0|^2 - r^2$

□

Remarque 2.6. On peut considérer que ∞ est une solution dans le cas où on a une droite euclidienne, c'est-à-dire si $\alpha = 0$. On ne fournira pas de justifications supplémentaires dans cet article, le livre [And05] en donne plus.

Maintenant que nous avons unifié les notions de droite et de cercle, on peut énoncer la définition suivante.

Définition 2.7. Soit d une droite hyperbolique dans \mathcal{H} , on appelle les deux points de l'intersection du cercle généralisé $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et du cercle contenant d , les points à l'infini de d .

La définition suivante nous servira plus tard lorsque nous trouverons un groupe d'isométrie pour cette géométrie qui envoie des droites hyperboliques sur des droites hyperboliques.

Définition 2.8. Un groupe G agit transitivement sur un ensemble E si pour chaque $x, y \in E$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) = y$.

Il est toutefois possible d'avoir une condition plus facile à vérifier.

Lemme 2.9. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble E et $x_0 \in E$. Supposons que pour tout $y \in E$, il existe $g \in G$ tel que $g(y) = x_0$. Alors, G agit transitivement sur E .

Démonstration. Soit $x, y \in E$ et $g_1, g_2 \in G$ tel que $g_1(x) = g_2(y) = x_0$. Alors $g_2^{-1} \circ g_1(x) = y$. □

3 Transformations de Möbius

Dans cette section, on définit les transformations de Möbius. Puis, on prouve qu'ils forment un groupe qu'il est possible de représenter par des matrices 2×2 . On trouve finalement un sous-groupe préservant le demi-plan de Poincaré et envoyant les droites hyperboliques sur des droites hyperboliques.

Définition 3.1. Une transformation de Möbius est une fonction de la forme :

$$m : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ et } ad - bc \neq 0.$$

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

On gère l'infini comme suit :

- Si $z = \infty$, $m(z) = \frac{a}{c}$ ou $m(z) = \infty$ si $c = 0$
- Si $z = -\frac{d}{c}$, $m(z) = \infty$

La condition $ad - bc \neq 0$ nous permet d'éviter toute forme indéterminée.

On définit aussi $M\ddot{ö}b^+$ comme l'ensemble des transformations de Möbius.

Proposition 3.2. *L'ensemble $M\ddot{ö}b^+$ forme un groupe.*

Démonstration. Soit $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et $n(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ deux transformations de Möbius.

1. On a que $m \circ n(z)$ est une autre transformation de Möbius. En effet,

$$m \circ n(z) = \frac{a \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + b}{c \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + d} = \frac{a\alpha z + a\beta + b\gamma z + b\delta}{c\alpha z + c\beta + d\gamma z + d\delta} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}. \quad (1)$$

2. Les transformations de Möbius sont des bijections et leurs inverses sont eux-mêmes des transformations de Möbius. Soit $z' = m(z)$, on a

$$(cz + d)z' = az + b \Rightarrow z(cz' - a) = b - dz'$$

$$\Rightarrow z = \frac{b - dz'}{cz' - a}$$

$$\Rightarrow m^{-1}(z) = \frac{b - dz}{cz - a}.$$

De plus, la fonction identité est une transformation de Möbius et la composition de fonction est associative. Donc, les transformations de Möbius forment un groupe. \square

Remarque 3.3. Dans la preuve du théorème précédent, on voit un lien fort entre la multiplication de matrice 2×2 et la composition de transformations de Möbius, qui nous mène à la proposition suivante, qui permet de calculer plus efficacement la composition de deux transformations..

Proposition 3.4. *Il existe un morphisme trivial ι de $GL_2(\mathbb{C})$, les matrices 2×2 inversibles à coefficients complexes, vers le groupe $M\ddot{o}b^+$ des transformations de Möbius défini par :*

$$\iota : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}.$$

Démonstration. Il suffit d'observer dans l'équation 1, qui calcule la composition de deux transformations, que lorsque l'on compose deux transformations, on obtient les mêmes coefficients que lorsque l'on multiplie deux matrices. \square

Note 3.5. Le morphisme ι n'est pas un isomorphisme. En effet, deux matrices peuvent représenter une seule transformation de Möbius. Par exemple, $2I_{2 \times 2} \neq I_{2 \times 2}$, mais ces deux matrices représentent la transformation identité.

La démonstration du théorème suivant est présentée dans [And05]. Ce théorème nous sera utile à quelques reprises.

Théorème 3.6. *Les transformations de Möbius sont des transformations conformes, c'est-à-dire qu'elles préservent les angles entre les tangentes à deux courbes à leur points d'intersections.*

Nous allons maintenant montrer que les transformations de Möbius envoient des cercles généralisés vers des cercles généralisés. Pour ce faire, nous allons prendre certaines transformations de Möbius assez simples et montrer qu'elles ont cette propriété. Puis, nous montrerons que toutes les transformations de Möbius s'expriment comme une composition de ces transformations de Möbius simples.

Lemme 3.7. *Les transformations de Möbius de la forme $m_0(z) = az + b$ où $a \neq 0$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $m_0(\infty) = \infty$ envoie des cercles généralisés sur des cercles généralisés.*

Démonstration. Selon la proposition 2.5, un cercle généralisé c est défini par une équation de la forme $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$. Montrons que $\omega = az + b$ satisfait aussi à l'équation.

On a $z = \frac{1}{a}(\omega - b)$ en substituant dans l'équation du cercle, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \frac{1}{a}(\omega - b) \frac{1}{a}(\bar{\omega} - \bar{b}) + \frac{\beta}{a}(\omega - b) + \frac{\bar{\beta}}{a}(\bar{\omega} - \bar{b}) + \gamma \\ &= \frac{\alpha}{|a|^2} \omega \bar{\omega} + \left(\frac{\beta}{a} - \frac{\alpha \bar{b}}{|a|^2} \right) \omega + \left(\frac{\bar{\beta}}{a} - \frac{\alpha b}{|a|^2} \right) \bar{\omega} + \left(\gamma - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\beta b}{a} \right) \right) \end{aligned}$$

qui est de la forme de l'équation d'un cercle. \square

Remarque 3.8. Si c contient une droite euclidienne, son image par m_0 aussi, car $\frac{\alpha}{|a|^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. Ceci est cohérent avec le fait que $m_0(\infty) = \infty$, car un cercle généralisé contient une droite si, et seulement si il contient ∞ .

Lemme 3.9. *La fonction $m_1(z) = \frac{1}{z}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m_1(0) = \infty$ et $m_1(\infty) = 0$ envoie des cercles sur des cercles.*

Démonstration. On fait comme le lemme précédent. Soit $\omega = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{\omega}$, on a

$$\alpha \frac{1}{\omega} \frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{\beta}{\omega} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\omega}} + \gamma = 0.$$

Si on multiplie par $\omega\bar{\omega}$, on a

$$\gamma\omega\bar{\omega} + \bar{\beta}\omega + \beta\bar{\omega} + \alpha = 0$$

qui est l'équation d'un cercle. \square

Théorème 3.10. *Les transformations de Möbius envoient des cercles sur des cercles dans $\hat{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Une transformation $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ peut s'écrire comme :

- $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ si $c = 0$;
- $m = n_0 \circ n_1 \circ n_2$ où $n_0(z) = -(ad-bc)z + \frac{a}{c}$, $n_1(z) = \frac{1}{z}$ et $n_2(z) = c^2z + cd$ si $c \neq 0$.

Dans les deux cas, on peut appliquer les deux lemmes précédents pour montrer que la transformation envoie des cercles sur des cercles. \square

On peut maintenant introduire un sous-groupe de $M\ddot{ö}b^+$ préservant le demi-plan de Poincaré et y établir plusieurs propriétés qui nous seront utiles dans la section suivante.

Théorème 3.11. *L'ensemble*

$$M\ddot{ö}b^+(\mathcal{H}) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in M\ddot{ö}b^+ \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad-bc > 0 \right\}$$

est un sous-groupe de $M\ddot{ö}b^+$ qui préserve \mathcal{H} .

Démonstration. Soit $m \in M\ddot{ö}b^+(\mathcal{H})$ et $z \in \mathcal{H}$. On a,

$$\begin{aligned} \text{Im}(m(z)) &= \text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{c^2+d^2}\right) \\ &= \frac{(ad-bc)\text{Im}(z)}{c^2+d^2} > 0. \end{aligned}$$

On remarque puisque $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $z \notin \mathbb{R}$ et $z \neq \infty$, le numérateur et le dénominateur ne peuvent ni être nul, ni être l'infini. De plus, $ad-bc \neq 0 \Rightarrow c^2+d^2 \neq 0$. \square

Théorème 3.12. *L'ensemble $M\ddot{ö}b^+(\mathcal{H})$ envoie des droites hyperboliques sur des droites hyperboliques.*

Démonstration. On sait que les transformations de Möbius envoient des cercles généralisés sur des cercles généralisés et préservent les angles entre deux courbes.

Comme les éléments de $M\ddot{ö}b^+(\mathcal{H})$ préservent $\widehat{\mathbb{R}}$, les cercles perpendiculaires à $\widehat{\mathbb{R}}$ seront envoyés vers d'autres cercles perpendiculaires à $\widehat{\mathbb{R}}$. Or, ceux-ci sont précisément des droites hyperboliques. \square

Théorème 3.13. *$M\ddot{ö}b^+(\mathcal{H})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites hyperboliques de \mathcal{H} .*

Démonstration. Soit d une droite hyperbolique. Selon le lemme 2.8, il suffit de trouver une transformation qui envoie cette droite sur l'axe imaginaire positif.

On pose x_0 et x_1 les points à l'infini de d .

Cas 1 : $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$

On suppose sans perte de généralité que $x_1 > x_0$, on pose $m(z) = \frac{z-x_1}{z-x_0}$.

Cas 2 : $x_0 = \infty$ ou $x_1 = \infty$

On suppose sans perte de généralité que $x_0 = \infty$, on remarque que $x_1 \in \mathbb{R}$.

On pose $m(z) = z - x_1$.

Dans les deux cas on remarque que m envoie les points x_0 et x_1 sur ∞ et 0 , respectivement. Or, ce sont les points à l'infini de l'axe imaginaire positif, donc m envoie d sur l'axe imaginaire positif. Par conséquent, l'ensemble $M\ddot{ö}b^+(\mathcal{H})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites hyperboliques de \mathcal{H} . \square

Le précédent théorème peut être reformulé pour dire qu'étant donné deux droites hyperboliques, il existe au moins une transformation de Möbius qui envoie la première vers la deuxième.

4 Longueur hyperbolique

Cette section introduira la notion de longueur de chemin dans le demi-plan de Poincaré.

Définition 4.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue dans $[a, b]$.

La fonction f est un chemin C^1 dans \mathbb{R}^2 si f est différentiable dans (a, b) avec sa dérivée continue.

La fonction f est un chemin C^1 par morceaux dans \mathbb{R}^2 s'il existe une partition de $[a, b]$ tel que f est un chemin C^1 si on le restreint à chaque élément de la partition.

Nous allons maintenant introduire une notation qui nous permettra de calculer des longueurs hyperboliques.

Notation 4.2. Soit $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un chemin C^1 . Si on voit f dans \mathbb{C} au lieu de \mathbb{R}^2 . C'est-à-dire $(x, y) \rightarrow x + yi$, on peut noter

$$\int_f \mu(z) |dz| = \int_a^b \mu(f(t)) |f'(t)| dt$$

où f' est la dérivée de f à valeur dans \mathbb{R}^2 .

On peut étendre cette notation à un chemin C^1 par morceaux en faisant la somme des intégrales sur les chemins C^1 d'une partition donnée par la définition du chemin C^1 par morceaux.

Le lemme suivant nous servira plus tard et peut être interprété intuitivement par le fait que si l'on parcourt un chemin au complet, on parcourra une distance supérieure ou égale à sa longueur (si l'on «reculait» lors du parcours, l'inégalité serait stricte).

Lemme 4.3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin par morceaux dans C^1 , $\rho : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ une surjection dans C^1 et $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$, alors

$$\int_f \mu(z) |dz| \leq \int_{f \circ \rho} \mu(z) |dz|.$$

De plus, il y a égalité si ρ est monotone.

Démonstration. On posera $s = \rho(t)$ et montrera seulement pour ρ , un chemin C^1 .

- Première partie, l'inégalité :

Puisque ρ est une surjection, il existe α et $\beta \in [a', b']$ tel que $\rho(\alpha) = a$ et $\rho(\beta) = b$. On supposera que $\beta < \alpha$, le cas $\beta > \alpha$ étant très similaire.

$$\begin{aligned} \int_{f \circ \rho} \mu(z) |dz| &= \int_{\alpha'}^{\beta'} \mu((f \circ \rho)(t)) |(f \circ \rho)'(t)| dt \\ &\geq \int_{\beta}^{\alpha} \mu(f(\rho(t))) |f'(\rho(t))| |\rho'(t)| dt \quad \text{On restreint le domaine} \\ &\geq \left| \int_{\beta}^{\alpha} \mu(f(\rho(t))) |f'(\rho(t))| \rho'(t) dt \right| \quad \text{Inégalité des triangles} \\ &= \left| \int_b^a \mu(f(s)) |f'(s)| ds \right| = \int_f \mu(z) |dz|. \end{aligned}$$

- Deuxième partie, l'égalité si f est monotone :

Si $\rho'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a', b']$, alors $\rho(a') = a$, $\rho(b') = b$ et $|\rho'(t)| = \rho'(t)$.

$$\begin{aligned} \int_{f \circ \rho} \mu(z) |dz| &= \int_{\alpha'}^{\beta'} \mu((f \circ \rho)(t)) |(f \circ \rho)'(t)| dt \\ &= \int_{\alpha'}^{\beta'} \mu(f(\rho(t))) |(f'(\rho(t)))| |\rho'(t)| dt \\ &= \int_a^b \mu(f(s)) |f'(s)| ds = \int_f \mu(z) |dz|. \end{aligned}$$

Si $\rho'(t) \leq 0$ pour tout $t \in [a', b']$, alors $\rho(a') = b$, $\rho(b') = a$ et $|\rho'(t)| = -\rho'(t)$.

$$\begin{aligned} \int_{f \circ \rho} \mu(z) |dz| &= \int_{a'}^{b'} \mu(f(\rho(t))) |(f'(\rho(t)))| |\rho'(t)| dt \\ &= - \int_b^a \mu(f(s)) |(f'(s))| ds = \int_f \mu(z) |dz|. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.4. Le lemme précédent nous permet de choisir comme on veut le domaine de définition d'un chemin C_1 par morceaux.

On a maintenant traité de tout ce qu'il faut pour introduire la notion de longueur hyperbolique.

Définition 4.5. Soit $\gamma > 0$, on définit la longueur hyperbolique d'un chemin C_1 par morceaux f contenu dans \mathcal{H} comme étant :

$$\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) = \int_f \frac{\gamma}{\text{Im}(z)} |dz|.$$

Pour la démonstration du prochain théorème, nous aurons besoin de la définition suivante qui étend la notion de dérivé et qui n'est pas utilisée ailleurs dans cet article.

Définition 4.6. Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, on définit la dérivée de f en z_0 comme suit : $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ si cette limite existe. On dit que f est holomorphe en z_0 si cette limite existe.

Comme pour le cas réel, il y a des règles de dérivation. En particulier, nous utiliserons la règle de la composition dans la démonstration.

Théorème 4.7. Soit $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{H}$ un chemin C^1 par morceaux contenu dans \mathcal{H} et $\gamma > 0$. Sa longueur hyperbolique est invariante par rapport à $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}^+(\mathcal{H})$. C'est-à-dire :

$$\int_{m \circ f} \frac{\gamma}{\text{Im}(z)} |dz| = \int_f \frac{\gamma}{\text{Im}(z)} |dz|.$$

Démonstration. On montrera pour f un chemin C_1 seulement. On a que

$$m'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Im}(m(z)) &= \text{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} \right) \\ &= \frac{(ad - bc) \text{Im}(z)}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\text{longueur}_{\mathcal{H}}(m \circ f) &= \int_{m \circ f} \frac{\gamma}{\text{Im}(z)} |dz| \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma}{\text{Im}((m \circ f)(t))} |(m \circ f)'(t)| dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma}{\text{Im}(m(f(t)))} |(m'(f(t)))| |f'(t)| dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma |cf(t) + d|^2}{(ad - bc) \text{Im}(f(t))} \left| \frac{ad - bc}{(cf(t) + d)^2} \right| |f'(t)| dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt = \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f).
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.8. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$ un chemin par morceaux C^1 . Sa longueur hyperbolique est finie.*

Démonstration. On montrera seulement pour f un chemin C^1 . Puisque $[a, b]$ est compacte, $f[a, b]$ est compacte et il existe $B > 0$ tel que

$$f[a, b] \subseteq \{z \in \mathcal{H} \mid \text{Im}(z) \geq B\}.$$

Puisque $|f'(t)|$ est continue et défini sur un intervalle fermé, par le théorème des bornes, il existe $d \in [a, b]$ tel que

$$|f'(t)| \leq |f'(d)| \quad \forall t \in [a, b].$$

D'où,

$$0 \leq \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) = \int_a^b \frac{\gamma}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt \leq \int_a^b \frac{\gamma}{B} |f'(d)| dt = \frac{\gamma |f'(d)|}{B} (b - a)$$

qui est finie. □

5 Métrique de Poincaré

Cette section parlera de la métrique de Poincaré, qui permet de définir la distance hyperbolique entre deux points du demi-plan de Poincaré. En plus, de la notion de longueur d'un chemin dans le demi-plan de Poincaré. Pour cette section et l'autre suivante, on supposera que le paramètre γ de la longueur hyperbolique vaut 1.

Définition 5.1. Une métrique sur un ensemble E est une fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E;$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in E.$

Définition 5.2. On définit $\Gamma[x, y]$ l'ensemble des chemins C^1 par morceaux $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que $f(a) = x$ et $f(b) = y$.

Définition 5.3. On définit la fonction

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\}.$$

On nommera cette fonction la métrique de Poincaré en vue d'un résultat à venir.

Proposition 5.4. La fonction $d_{\mathcal{H}}$ est invariante par rapport à $M\ddot{o}b^+(\mathcal{H})$, c'est-à-dire que si $m \in M\ddot{o}b^+(\mathcal{H})$ et $x, y \in \mathcal{H}$, $d_{\mathcal{H}}(x, y) = d_{\mathcal{H}}(m(x), m(y))$.

Démonstration. On remarque que $\{m \circ f \mid f \in \Gamma[x, y]\} \subseteq \Gamma[m(x), m(y)]$. On rappelle que la longueur hyperbolique est invariante par rapport à m . D'où

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(m(x), m(y)) &= \inf\{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(g) \mid g \in \Gamma[m(x), m(y)]\} \\ &\leq \inf\{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(m \circ f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \\ &= \inf\{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} = d_{\mathcal{H}}(x, y). \end{aligned}$$

Comme $m^{-1} \in m\ddot{o}b^+(\mathcal{H})$, on a $\{m^{-1} \circ g \mid g \in \Gamma[m(x), m(y)]\} \subseteq \Gamma[x, y]$ et effectuant les mêmes opérations, on obtient l'inégalité inverse. \square

Le théorème suivant nous permettra de calculer la distance hyperbolique entre deux points.

Théorème 5.5. On a l'égalité $d_{\mathcal{H}}(x, y) = \text{longueur}_{\mathcal{H}}(d)$ où d est une paramétrisation du segment de droite hyperbolique reliant x et y .

Démonstration. Puisque les transformations de Möbius agissent transitivement sur les droites hyperboliques et que $d_{\mathcal{H}}$ est invariant par rapport à ces transformations, on peut supposer que $x = ai$ et $y = bi$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et, sans perte de généralité, que $a < b$.

Le chemin $f_0 : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$ défini par $f_0(t) = ti$ est une paramétrisation du segment de droite reliant x et y . On remarque que $\text{Im}(f_0(t)) = t$ et $|f_0'(t)| = 1$, donc

$$\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_0) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Soit $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{H} \in \Gamma[x, y]$ défini par $f(t) = x(t) + y(t)i$, on veut que $\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_0) \leq \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f)$. D'abord, on montre que l'on peut ignorer la partie réelle de f . Soit $g(t) = y(t)i$, on veut que la longueur de g soit plus courte que la longueur de f . On a $g(\alpha) = x$ et $g(\beta) = y$, donc $g \in \Gamma[x, y]$, mais

$$\begin{aligned} \text{longueur}_{\mathcal{H}}(g) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{y(t)} \sqrt{(y'(t))^2} dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{y(t)} \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt = \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_0) \leq \text{longueur}_{\mathcal{H}}(g)$.

On a que $g([\alpha, \beta])$ est un segment de droite joignant $a'i$ et $b'i$ avec $a' \leq a < b \leq b'$. Soit $g_0 : [a', b'] \rightarrow \mathcal{H}$ défini par $g_0(t) = ti$. On a,

$$\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_0) = \ln \left(\frac{b}{a} \right) \leq \ln \left(\frac{b'}{a'} \right) = \text{longueur}_{\mathcal{H}}(g_0).$$

De plus, on remarque que $g = g_0 \circ (g_0^{-1} \circ g)$ où $(g_0^{-1} \circ g) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a', b']$ est surjective. Donc, par le lemme 4.3, $\text{longueur}_{\mathcal{H}}(g_0) \leq \text{longueur}_{\mathcal{H}}(g)$, d'où

$$\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_0) \leq \text{longueur}_{\mathcal{H}}(g_0) \leq \text{longueur}_{\mathcal{H}}(g) \leq \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f).$$

□

Il reste à vérifier que la fonction $d_{\mathcal{H}}$ est bien une métrique.

Théorème 5.6. *La métrique de Poincaré est une métrique.*

Démonstration. On vérifie les trois conditions.

1. Il est évident que $d_{\mathcal{H}}(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{H} \in \Gamma[x, y]$, on a $\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt \geq 0$, car $\frac{1}{\text{Im}(f(t))}$ et $|f'(t)|$ sont positifs. Par conséquent, $d_{\mathcal{H}}(x, y) = \inf\{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \geq 0$.
2. On veut $d_{\mathcal{H}}(x, y) = d_{\mathcal{H}}(y, x)$. Il suffit de montrer que

$$\{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} = \{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \mid f \in \Gamma[y, x]\}.$$

Ces deux ensembles auront alors le même infimum.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{H} \in \Gamma[x, y]$ et la surjection $\rho : [a, b] \rightarrow [a, b]$ définit par $\rho(t) = (a + b) - t$. Posons $f' = f \circ \rho$, on remarque que $f'(a) = y$ et $f'(b) = x$, donc $f' \in \Gamma[y, x]$. Or, puisque ρ est surjective et décroissante, selon le lemme 4.3, $\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) = \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f')$ et, donc

$$\{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \subseteq \{\text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \mid f \in \Gamma[y, x]\}.$$

On peut montrer l'inclusion inverse par le même argument.

3. L'inégalité du triangle

Soit $x, y, z \in \mathcal{H}$ et $f_x : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$, $f_z : [b, c] \rightarrow \mathcal{H}$ des paramétrisations des segments de droites reliant x et y , et y et z , respectivement (on utilise ici la remarque 4.4). Soit $f : [a, c] \rightarrow \mathcal{H}$ la concaténation de f_x et f_z , on remarque que $f_x \in \Gamma[x, y]$, $f_z \in \Gamma[y, z]$ et $f \in \Gamma[x, z]$. De plus, selon la proposition 5.5, $d_{\mathcal{H}}(x, y) = \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_x)$ et $d_{\mathcal{H}}(y, z) = \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_z)$. D'où,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(x, z) &\leq \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \\ &= \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_x) + \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f_z) \\ &= d_{\mathcal{H}}(x, y) + d_{\mathcal{H}}(y, z). \end{aligned}$$

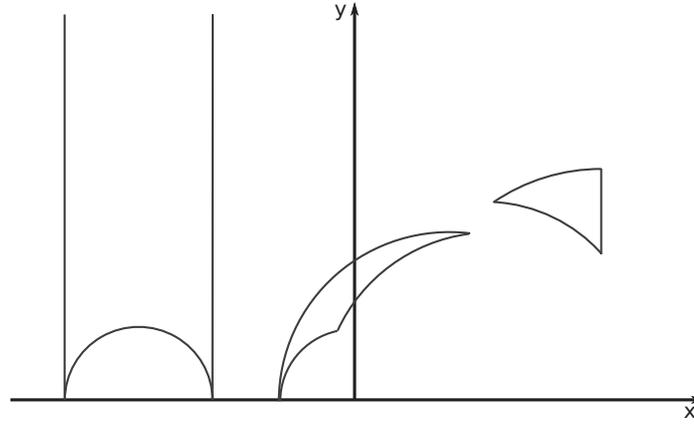


Figure 2 – Trois exemples de triangles hyperboliques. Le triangle de droite est compact

□

La définition suivante nous servira à démontrer le résultat final et donne un sens à la notion de distance entre deux ensembles.

Définition 5.7. Soit E un ensemble muni d'une métrique d . Soit aussi $X, Y \subset E$ non vide, et $e \in E$. On définit :

$$d(X,Y) = \inf\{d(x,y) \mid x \in X, y \in Y\};$$

$$d(e,X) = \inf\{d(e,x) \mid x \in X\}.$$

La distance entre X et Y , et e et X , respectivement.

6 Triangles hyperboliques et résultat final

Cette section étend la notion de triangle au demi-plan de Poincaré et introduit la trigonométrie dans la géométrie hyperbolique. Les triangles hyperboliques serviront à démontrer le résultat final de cet article. Lorsque l'on parlera d'angle entre deux courbes, nous parlerons de l'angle entre leurs tangentes.

Définition 6.1. Soit $A, B, C \in \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \widehat{\mathbb{R}}$ tous différents. On définit le triangle hyperbolique $\triangle ABC$ la figure géométrique formée par les segments de droites, les demi-droites ou les droites hyperboliques reliant ces points, que l'on nomme côtés du triangle. On dit que $\triangle ABC$ est un triangle hyperbolique compact si $A, B, C \in \mathcal{H}$.

La figure 2 donne trois exemples de triangles hyperboliques. Le triangle de droite est le seul qui soit compact. Celui de gauche a comme extrémités trois points dans $\widehat{\mathbb{R}}$; de telles triangles sont dits idéals. Un triangle compact est donc formé de trois segments de droites joints à leurs extrémités de façon analogue

aux triangles euclidiens. Dans un triangle non compact, par contre, les segments de droites peuvent se prolonger et se rencontrer «à l'infini». Il est aussi possible d'avoir des triangles hyperboliques rectangles

Définition 6.2. Soit $\triangle ABC$ un triangle hyperbolique compact et α , β et γ ses angles intérieurs. On dit que $\triangle ABC$ est un triangle hyperbolique rectangle si α , β ou γ est un angle droit.

Proposition 6.3. Soit $\triangle ABC$ un triangle hyperbolique, au plus un de ses angles intérieurs est un angle droit.

Démonstration. Supposons que α et β sont deux angles droits du triangle $\triangle ABC$.

Puisque $Möb^+(\mathcal{H})$ agit transitivement sur les droites hyperboliques et que ses éléments préservent les angles, on peut supposer que le côté c entre α et β est sur l'axe imaginaire positif. Puisque α et β sont des angles droits, les deux autres côtés du triangle sont sur des demi-cercles distincts centrés en zéro. En particulier, ces côtés n'ont aucun point d'intersection, ce qui contredit la construction du $\triangle ABC$. \square

Définition 6.4. La proposition précédente nous permet de définir sans ambiguïté l'hypoténuse comme le côté opposé à l'angle droit et les cathètes comme les deux autres côtés.

On a, dans les triangles hyperboliques compacts, des relations qui sont très similaires aux relations dans les triangles euclidiens. Nous n'explorerons, par contre, que sommairement celles-ci.

Théorème 6.5. *Première loi des cosinus hyperbolique*

Soit $\triangle ABC$ un triangle hyperbolique compact avec α , β et γ comme angles intérieurs, et a , b et c , respectivement, les longueurs hyperboliques des côtés opposés à ces angles. On a la relation

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma).$$

Contrairement au cas euclidien, il y a deux lois des cosinus. Cependant, nous n'aurons pas besoin de la seconde. La démonstration de la première loi des cosinus hyperbolique est trop longue pour l'utilisation que nous en ferons. Elle est présentée dans [And05] avec les autres relations dans les triangles et se fait dans un autre modèle de géométrie hyperbolique que le demi-plan de Poincaré.

Corollaire 6.6. *Théorème de Pythagore hyperbolique*

Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle hyperbolique d'hypoténuse de longueur c et de cathètes de longueur a et b . On a que l'hypoténuse est le côté le plus long du $\triangle ABC$ et la formule suivante :

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

Démonstration. Pour la formule, on utilise la première loi des cosinus hyperbolique avec $\gamma = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que l'hypoténuse est le côté le plus long, car $\cosh(x) \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\cosh(x)$ est croissante. \square

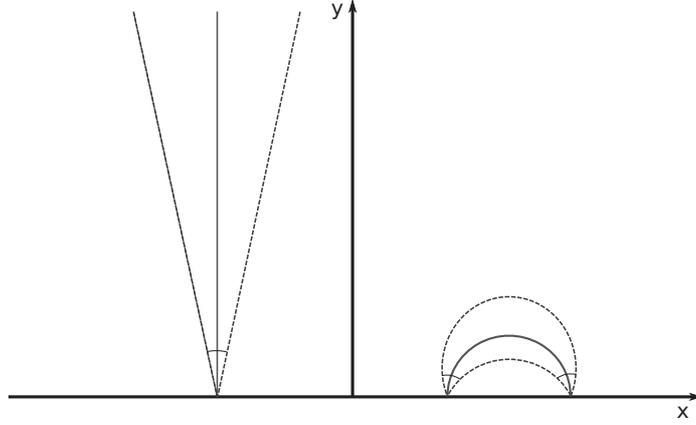


Figure 3 – Illustration du théorème 6.7

On a maintenant tous les résultats nécessaires pour démontrer le résultat final.

Théorème 6.7. *Soit \mathbf{D} une droite hyperbolique dans \mathcal{H} et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Le lieu des points z tel que $d_{\mathcal{H}}(z, \mathbf{D}) = \delta$ forme deux arcs de cercle dans $\widehat{\mathcal{C}}$ et les cercles contenant ces arcs intersectent les points à l'infini de \mathbf{D} avec le même angle.*

La figure 3 illustre le précédent théorème.

Démonstration. Puisque $M\ddot{o}b^+(\mathcal{H})$ agit transitivement sur les droites hyperboliques et que ses éléments envoient des cercles sur des cercles, on peut supposer que \mathbf{D} est l'axe imaginaire positif.

Soit $Z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{H} \setminus \mathbf{D}$, $P_0 = \rho i \in \mathbf{D}$ et $P \in \mathbf{D}$ tel que $P \neq P_0$. On remarque que $\triangle ZP_0P$ est un triangle rectangle et que son hypoténuse est le segment de droite hyperbolique reliant Z et P . Par conséquent, le segment de droite \mathbf{S} reliant Z et P_0 est plus court et, puisque l'on a pris un point P quelconque sur \mathbf{D} , $d_{\mathcal{H}}(Z, \mathbf{D}) = \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f)$ où f est une paramétrisation de \mathbf{S} . La figure 4 donne une illustration du raisonnement.

On remarque que \mathbf{S} est sur un cercle centré en zéro.

Si $\theta < \frac{\pi}{2}$, une paramétrisation de \mathbf{S} est $f : [\theta, \frac{\pi}{2}] \rightarrow S$ définie par $f(t) = \rho e^{it}$. On remarque que $|f'(t)| = |\rho i e^{it}| = \rho$ et que $\text{Im}(f(t)) = \rho \sin t$. On veut

$$\begin{aligned} \delta &= \text{longueur}_{\mathcal{H}}(f) \\ &= \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\rho \sin t} \rho dt \\ &= \ln(\text{cosec}(\theta) - \cotg(\theta)). \end{aligned}$$

Si $\theta > \frac{\pi}{2}$, une paramétrisation de \mathbf{S} est $f : [\frac{\pi}{2}, \theta] \rightarrow S$ définie par $f(t) = \rho e^{it}$ et on obtient

$$\delta = -\ln(\text{cosec}(\theta) - \cotg(\theta)).$$

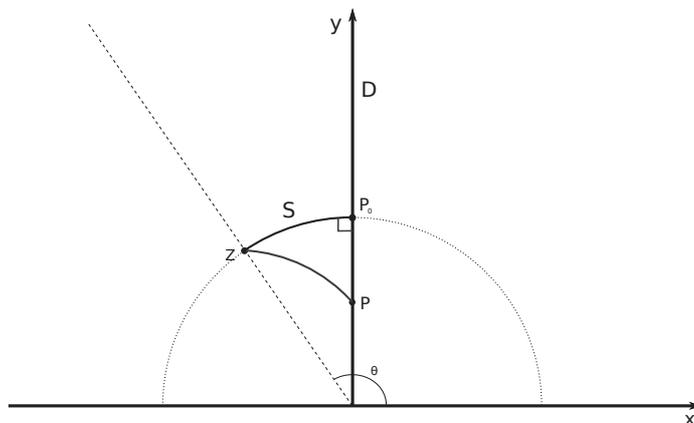


Figure 4 – Illustration de la démonstration du théorème 6.7

Dans les deux cas on a que δ est une fonction de θ seulement et que $\delta(\theta)$ est une bijection de $(0, \frac{\pi}{2})$ et $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, respectivement, vers \mathbb{R}_+^* . Le lieu des points z tel que $d_{\mathcal{H}}(z, D) = \delta$ forme donc deux demi-droites avec comme extrémité zéro. Donc, les cercles les contenant intersectent les points à l'infini de \mathbf{D} , soit 0 et ∞ . En remplaçant θ par $\pi - \theta$, on peut montrer qu'ils forment le même angle par rapport à \mathbf{D} . Puisque $M\ddot{o}b^+(\mathcal{H})$ envoie des cercles généralisés vers cercles généralisés, ces lieux de points sont toujours des arcs de cercle.

On remarque que puisque \mathbb{R}_+^* préservent les angles, il y aura toujours le même angle θ entre la droite et les deux arcs de cercle. De plus, si la droite est sur un cercle euclidien et donc les arcs aussi, les angles aux deux points à l'infini de la droite entre la droite et chaque arc doivent géométriquement être égaux. \square

Ce résultat illustre bien le fait que la géométrie hyperbolique est fort différente de la géométrie euclidienne. En effet, dans le cas euclidien ces lieux de points correspondent aux droites euclidiennes. Dans le cas hyperbolique, au contraire, ce ne sont pas des droites hyperboliques, car les arcs de cercle ne forment pas un angle droit avec l'axe réel. La géométrie hyperbolique a donc certaines propriétés qui échappent à notre intuition euclidienne. Nous n'avons vu que certaines d'entre elles. Elle est donc un bel exemple de la richesse que peut avoir la géométrie.

Références

[And05] James ANDERSON : *Hyperbolic Geometry*. Springer, 2005.

KEVIN THOUIN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Kevin.Thouin@USherbrooke.ca