

La structure d’algèbre amassée des grassmaniennes $\text{Gr}(k, n)$

Souheila Hassoun, Denis Langford, Frédéric Langlois

Reçu le 2017-07-06 et accepté le 2017-11-23

RÉSUMÉ La grassmannienne $\text{Gr}(k, n)$, qui est l’un des objets étudiés dans le domaine de la géométrie algébrique, est l’ensemble de tous les sous-espaces de dimension k d’un espace vectoriel de dimension n . Il se trouve que, pour chaque grassmannienne, l’anneau de coordonnées d’une grassmannienne est isomorphe à une algèbre amassée, un objet très populaire dans la théorie de représentation. Dans cet article, pour $\text{Gr}(3, 6)$, nous avons calculé toutes les algèbres inclinées et inclinées amassées. Nous avons ensuite vérifié la validité d’un magnifique théorème nous venant de la théorie de représentation qui fait un lien entre ces algèbres et l’algèbre amassée associée à cette grassmannienne.

1 Introduction

Cet article résume le travail de notre groupe durant l’hiver 2017 sous la direction du professeur Thomas Brüstle, qui portait sur l’étude de la structure d’algèbre amassée des grassmaniennes.

Dans la deuxième section de cet article, nous allons décrire ce qu’est un carquois, un amas, une graine, une mutation d’une graine dans une certaine direction, puis, en utilisant ces notions, nous allons définir l’algèbre amassée générée par une graine S . Dans cette même section, une partie sera consacrée à l’algèbre amassée de type A_2 pour illustrer la théorie que nous avons déjà introduite et quelques propriétés intéressantes des algèbres amassées comme le phénomène de Laurent et la relation entre le type d’une algèbre amassée et la forme de son carquois initial. Nous y introduirons aussi les carquois de Dynkin de types A_n , D_n , E_6 , E_7 , et E_8 .

Dans la troisième section, nous définirons et étudierons les grassmaniennes. Nous énoncerons le théorème de Julius Plücker concernant l’anneau des coordonnées de la grassmannienne $\text{Gr}(2, 4)$ et nous définirons les variables de Plücker d’une grassmannienne $\text{Gr}(k, n)$ en général. En utilisant ces variables, nous énoncerons un théorème dû à Fomin et Zelevinsky concernant le cas $k = 2$ et à Scott pour le cas $k \geq 3$. Ce théorème indique que l’anneau des coordonnées d’une grassmannienne admet la structure d’une algèbre amassée. La grassmannienne $\text{Gr}(2, 4)$ sera amenée en exemple et nous consacrerons une sous-section à la description

Nous remercions grandement Thomas Brüstle d’avoir supervisé notre groupe de travail.

explicite de la grassmanienne $\text{Gr}(3,6)$ ainsi qu'à ses propriétés afin de vérifier les propriétés discutées dans la section précédente.

Dans la dernière section, nous parlerons des algèbres inclinées et inclinées amassées. Après avoir défini ces dernières, nous définirons la dimension globale d'une algèbre et caractériserons la dimension globale de ces algèbres. Nous donnerons l'exemple du carquois de type D_4 et nous observerons une bijection entre les carquois des algèbres inclinées amassées et les carquois des graines de la grassmanienne $\text{Gr}(3,6)$. Ces dernières sont calculées dans la Section 3. Cette bijection vérifie les résultats de Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov [BMR⁺06].

2 Algèbre amassée

La structure de l'anneau des coordonnées d'une grassmanienne est celle d'une algèbre amassée. Pour cette raison, nous commencerons par définir ce qu'est une algèbre amassée et nous donnerons un exemple de construction d'une telle algèbre.

Notons que les algèbres amassées ont été introduites et développées par Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky [FZ02].

2.1 Définitions

Afin de comprendre la procédure de construction d'une algèbre amassée, quelques concepts et définitions sont nécessaires.

Les définitions qui suivent utilisent le concept de carquois. Un *carquois* est simplement un graphe orienté composé d'un ensemble de sommets associé à un ensemble de flèches qui relient un sommet à un autre sommet ou à lui-même. En d'autres termes, c'est un graphe dont les arêtes sont des flèches.

Exemple 2.1. Voici une représentation classique de carquois :

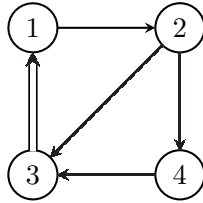


Figure 1 – Exemple de carquois

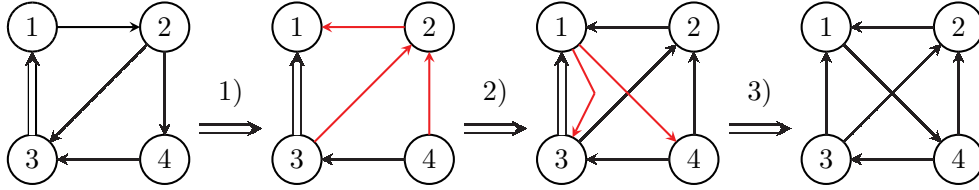
Ce carquois contient quatre sommets étiquetés 1, 2, 3 et 4 ; quatre flèches simples $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$ et $4 \rightarrow 3$; et une flèche double $3 \rightleftarrows 1$. Une flèche double est simplement un ensemble de deux flèches simples.

Note 2.2. Pour les algèbres amassées, on travaillera uniquement avec des carquois ne contenant aucune boucle et aucun 2-cycle.

Définition 2.3. Étant donné un carquois Q formé de n sommets, la mutation par le sommet k ($1 \leq k \leq n$) transforme le carquois Q en un nouveau carquois $Q' = m_k(Q)$ selon la liste de transformations suivantes :

1. Inverser toute flèche qui débute ou qui termine au sommet k ;
2. Pour tout chemin de la forme $i \rightarrow k \rightarrow j$, ajouter une nouvelle flèche $j \rightarrow i$;
3. Retirer tous les 2-cycles.

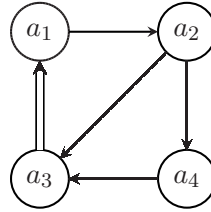
Exemple 2.4. Disons que Q est le carquois de l'exemple précédent (Figure 1). On veut $Q' = m_2(Q)$ (mutation du carquois Q par le sommet 2).



Définition 2.5. Soit l'ensemble de variables $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ transcendant sur \mathbb{Q} . Alors la famille (a_1, a_2, \dots, a_n) est appelée un *amas* et a_1, a_2, \dots, a_n sont appelées des *variables amassées*.

Définition 2.6. Étant donné un amas x et un carquois Q , la paire $S := (x, Q)$ est appelée une *graine*.

Exemple 2.7. Disons que Q est le carquois de la figure 1 et posons l'amas $x := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Alors, la graine $S := (x, Q)$ serait la suivante :



Définition 2.8. Soit un amas $x := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, un carquois Q et une graine $S := (x, Q)$. La *mutation de la graine S de direction k* est l'application $\mu_k(S) : S \rightarrow S'$ où :

1. $S' := (x', Q)$ est une nouvelle graine formée d'un nouvel amas x' et d'un nouveau carquois Q' ;
2. $x' := (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ où
 si \mathcal{I} est l'ensemble des sommets $i \in Q$ tels qu'il existe une flèche $i \rightarrow k$ et
 si \mathcal{O} est l'ensemble des sommets $j \in Q$ tels qu'il existe une flèche $k \rightarrow j$
 alors,

$$a_t = \begin{cases} \frac{1}{a_t} \left[\prod_{i \in \mathcal{I}} a_i + \prod_{j \in \mathcal{O}} a_j \right], & \text{si } t = k \\ a_k, & \text{sinon} \end{cases}$$

3. $Q' = m_k(Q)$

Plusieurs exemples de cette opération sont disponibles dans la Section 2.2.

Remarque 2.9. Cette mutation est involutive, c'est-à-dire que si l'on mute deux fois dans la même direction, on revient à la graine initiale. Plus formellement : $m_k(m_k(Q)) = Q$.

Définition 2.10. Une variable amassée a est dite gelée si la mutation dans la direction de cette variable n'est pas permise. De même, elle est non-gelée si on peut muter dans sa direction.

Notation 2.11. Dans tous les carquois de cet article représentant des graines, les variables amassées seront indiquées par des carrés et les non-gelées par des cercles.

Définition 2.12. Soient un amas $x := (a_1, a_2, \dots, a_n)$, un carquois Q , et une graine $S := (x, Q)$.

On définit \mathcal{A} comme l'ensemble de toutes les variables d'amas obtenues par un nombre arbitraire de mutations sur S .

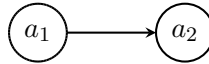
$$\mathcal{A} := \{a \in \mu_{i_1} \mu_{i_2} \cdots \mu_{i_r} S \mid 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_r \leq n\}$$

On définit $\mathcal{C}(S)$, l'*algèbre amassée générée par la graine S* , comme étant le résultat de l'extension algébrique de \mathbb{Z} générée par \mathcal{A} .

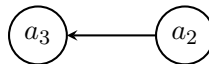
Les éléments de \mathcal{A} sont les *coordonnées* de $\mathcal{C}(S)$.

2.2 Construction d'une algèbre amassée de type A_2

Tel qu'indiqué dans la section précédente, les algèbres amassées sont construites par une série arbitraire de mutations sur une graine initiale. L'algèbre amassée de type A_2 s'appelle ainsi étant donnée qu'elle est construite à partir d'une graine initiale dont le carquois associé est un graphe de Dynkin de type A_2 . On choisit donc notre graine initiale $S_0 := (x_0, Q_0)$ avec l'amas initial $x := \{a_1, a_2\}$ et le graphe initial Q suivant :



On n'a maintenant que deux choix de mutations possibles. Sans perte de généralité, pour le présent article, nous avons choisi une mutation sur le sommet 1. À la suite de la mutation, on obtient une nouvelle graine $S_1 = (x_1, Q_1) = \mu_1(S_0)$ ayant la forme suivante :

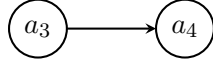


Où $x_1 = (a_3, a_2)$.

On calcule a_3 à l'aide de la formule fournie dans la Définition 2.8 :

$$a_3 = \frac{1}{a_1}(1 + a_2) = \frac{1 + a_2}{a_1}$$

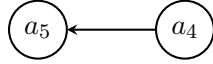
On a que $\mu_k(\mu_k(S)) = S$. Donc, pour la suite, nous ne pouvons qu'alterner la sélection du sommet pour les mutations. On trouvera donc une nouvelle graine $S_2 := (x_2, Q_0) = \mu_2(S_1)$:



Où $x_2 = (a_3, a_4)$, avec

$$a_4 = \frac{1}{a_2}(1 + a_3) = \frac{1}{a_2}\left(1 + \frac{1 + a_2}{a_1}\right) = \frac{1 + a_1 + a_2}{a_1 a_2}$$

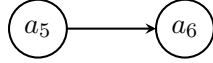
Dans le même ordre d'idées, on trouve la graine suivante $S_3 := (x_3, Q_1) = \mu_1(S_2)$:



Où $x_3 = (a_5, a_4)$, avec

$$a_5 = \frac{1}{a_3}(1 + a_4) = \frac{a_1}{1 + a_2}\left(1 + \frac{1 + a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right) = \frac{1 + a_1}{a_2}$$

Ensuite, on trouve $S_4 := (x_4, Q_0) = \mu_2(S_3)$:



Où $x_4 = (a_5, a_6)$, avec

$$a_6 = \frac{1}{a_4}(1 + a_5) = \frac{a_1 a_2}{1 + a_1 + a_2}\left(1 + \frac{1 + a_1}{a_2}\right) = a_1$$

Enfin, on trouve $S_5 := (x_5, Q_1) = \mu_1(S_4)$:

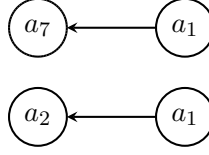
Où $x_5 = (a_7, a_1)$, avec

$$a_7 = \frac{1}{a_5}(1 + a_1) = \frac{a_2}{1 + a_1}(1 + a_1) = a_2$$

On peut maintenant noter que notre dernière graine S_5 a l'allure suivante :

On voit clairement qu'il existe un isomorphisme entre la graine S_5 et la graine S_0 . De plus, si l'on décidait de continuer notre manège de mutations plus longtemps, on retrouverait exactement quatre graines isomorphes à l'une des graines déjà obtenues pour ensuite revenir à la graine S_0 . Ainsi, on a trouvé toutes les graines existantes à isomorphisme près.

On a, de plus, trouvé toutes les variables d'amas possibles dans la situation actuelle. Ces dernières sont :



$$\left\{ a_1, a_2, \frac{1+a_1}{a_2}, \frac{1+a_2}{a_1}, \frac{1+a_1+a_2}{a_1 a_2} \right\} := \mathcal{A}$$

On obtient finalement l'algèbre amassée engendrée par la graine S_0 , $\mathcal{C}(S_0)$, en calculant $\mathbb{Z}(\mathcal{A})$, l'extension algébrique de l'ensemble \mathcal{A} .

2.3 Quelques propriétés intéressantes des algèbres amassées

Définition 2.13. Si \mathbb{K} est un corps et $k_i \in \mathbb{K}$. Alors, $\mathbb{L}[x] \in \mathbb{K}[x, x^{-1}]$ est un *polynôme de Laurent* s'il est un polynôme de la forme :

$$\mathbb{L}[x] = \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}} k_i x^i \right]$$

Le théorème suivant présente un très beau résultat qui donne une expression algébrique bien particulière aux variables amassées.

Théorème 2.14. *Pour toute algèbre amassée, toute variable amassée obtenue par la mutation d'une graine initiale peut être représentée par un polynôme de Laurent ayant pour variables les variables amassées contenues dans l'amas initial. Toute variable amassée a est un polynôme de Laurent ayant pour variables $\{a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$. On peut alors s'écrire :*

$$a \in \mathbb{L}[a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}]$$

Ce qui permet d'écrire que

$$a = \frac{\mathcal{P}(a_1, \dots, a_n)}{a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n}}$$

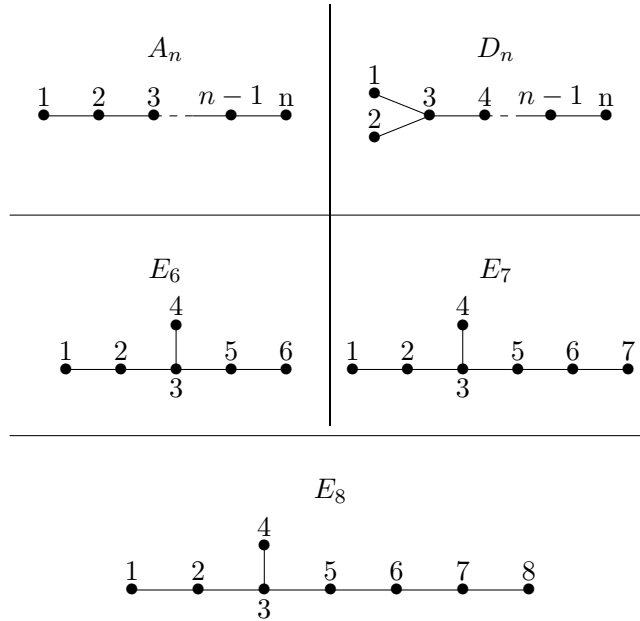
Ce dernier théorème, prouvé dans [FZ02], présente une belle expression pour toutes les variables amassées. Elles sont toutefois encore plus raffinées. Le théorème suivant en témoigne.

Théorème 2.15. *Pour toute algèbre amassée, les coefficients du polynôme au numérateur de $a = \frac{\mathcal{P}(a_1, \dots, a_n)}{a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n}}$, une variable amassée, sont tous des entiers positifs.*

Définition 2.16. Une algèbre amassée est dite de type fini si \mathcal{A} , l'ensemble de toutes les variables amassées qu'elle engendre par la mutation, est lui-même fini.

Théorème 2.17. *Une algèbre amassée de carquois Q est de type fini si et seulement si Q peut être obtenu par mutation d'un carquois de type Dynkin.*

Les carquois de type Dynkin sont originaires de la théorie de Lie. Ils sont classifiés de la manière suivante :



Introduits par Eugene Dynkin, ces graphes sont classés selon des types bien précis. Les graphes présentés ci-dessus sont du type non-gradués. Il existe des graphes du type gradués qui sont étudiés eux aussi dans le contexte des algèbres amassées. Par exemple, les créateurs des algèbres amassées Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky les ont étudiées dans [FZ02]. Nous nous limiterons cependant aux graphes non-gradués puisque c'est d'eux dont on a besoin pour explorer les grassmaniennes qui seront définies dans la prochaine section.

3 Grassmaniennes

3.1 Définitions

Définition 3.1. Une grassmannienne $\text{Gr}(k,n)$ est l'ensemble de tous les sous-espaces de \mathbb{C}^n qui sont de dimensions k .

La grassmannienne $\text{Gr}(k,n)$ est étudiée dans le domaine de la géométrie algébrique. Un théorème classique de Julius Plücker décrit son anneau de coordonnées comme étant le quotient d'un anneau de polynômes par certaines relations qui portent maintenant son nom.

Théorème 3.2 (Plücker). *Pour $(k,n) = (2,4)$,*

$$\mathbb{C}[\text{Gr}(k,n)] = \frac{\mathbb{C}[\chi_I \mid I \subset \{1,2,\dots,n\}, |I| = k]}{\text{relations de Plücker}}$$

où les relations de Plücker sont données par :

$$\chi_{1,3}\chi_{2,4} = \chi_{1,4}\chi_{2,3} + \chi_{1,2}\chi_{3,4}$$

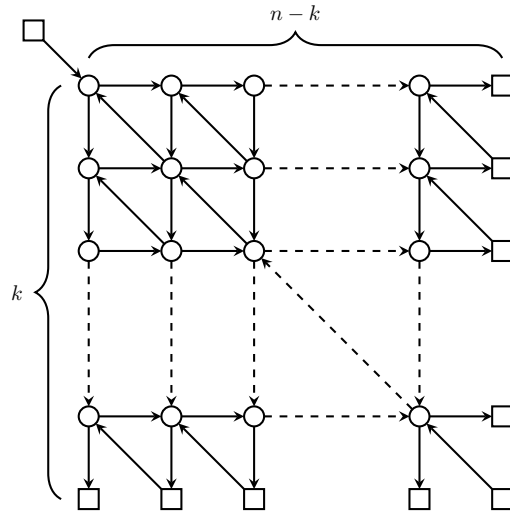
Définition 3.3. On nomme *variables de Plücker d'une grassmannienne $\text{Gr}(k,n)$* les variables contenues dans l'ensemble suivant :

$$\{\chi_I \mid I \subset \{1,2,\dots,n\}, |I| = k\}$$

Théorème 3.4 (Fomin, Zelevinsky pour $k=2$ /Scott pour $k \geq 3$). *Soient la grassmannienne $\text{Gr}(k,n)$ et son anneau de coordonnées $\mathbb{C}[\text{Gr}(k,n)]$.*

Soient X un ensemble de $(k-1)(n-k-1)$ variables non-gelées et F un ensemble de n variables gelées.

Soit Q le carquois composé des ensembles X et F et disposé de la manière suivante :



Si \mathcal{A}_Q est l'algèbre amassée obtenue par mutations sur Q , alors $\mathbb{C}[\text{Gr}(k,n)]$ est isomorphe \mathcal{A}_Q .

Ensuite, pour le cas $k = 2$, il existe une bijection entre les $\chi_{i,j}$ dans χ_I et les variables amassées.

Lorsque $k \geq 3$, \mathcal{A}_Q contient toujours plus de variables amassées qu'il y a de variables de Plücker.

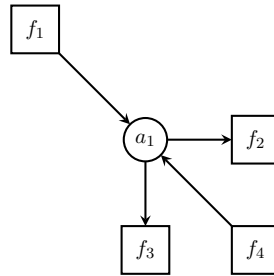
Enfin, soit Q' , le sous-carquois de Q n'incluant que les variables de l'ensemble X et les flèches les reliant. Tous les cas finis des algèbres amassées \mathcal{A}_Q sont connus et leur sous-carquois Q' est obtenu par mutations d'un graphe de Dynkin.

Le tableau suivant présente les cas finis (tous les autres cas sont infinis) :

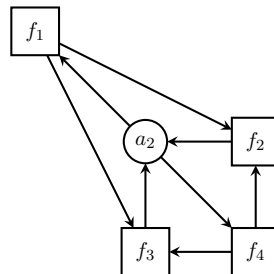
Grassmannienne	Type Dynkin
$\text{Gr}(2,n)$	A_{n-3}
$\text{Gr}(3,6)$	D_4
$\text{Gr}(3,7)$	E_6
$\text{Gr}(3,8)$	E_8

3.1.1 Court exemple : La grassmannienne $\text{Gr}(2,4)$

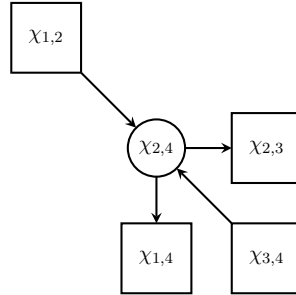
En général, les grassmanniennes sont des objets très complexes. Cet exemple de grassmannienne est heureusement assez simple. Prenons $\text{Gr}(2,4)$. Nous avons donc $\text{Gr}(2,4) = \{\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^4 \mid \dim \mathcal{V} = 2\}$. Considérons l'algèbre amassée isomorphe à l'anneau de coordonnées de $\text{Gr}(2,4)$. Par le théorème 3.4, nous aurons la graine initiale qui sera de la forme suivante :



On note qu'il y a une seule variable non-gelée. On ne peut donc faire la mutation que sur cette variable. Par cette mutation, on obtient la nouvelle graine qui est de la forme suivante :



Comme la mutation est involutive, ce sont les deux seules graines de cette algèbre amassée. Nous pouvons associer à chaque sommet de la graine initiale une variable de Plücker comme suit :



On peut alors observer que, dans ce cas, la formule de mutation de a_1 donne $a_1 a_2 = f_1 f_4 + f_2 f_3$. Ceci correspond à la relation de Plücker : $\chi_{1,3} \chi_{2,4} = \chi_{1,4} \chi_{2,3} + \chi_{1,2} \chi_{3,4}$. On peut en déduire qu'il y a une bijection entre les variables de Plücker et les variables amassées pour $\text{Gr}(2,4)$ comme l'indique le théorème 3.4. Cette bijection est donnée par le tableau suivant :

<i>Variable amassée</i>	<i>Plücker associée</i>
a_1	$\chi_{2,4}$
a_2	$\chi_{1,3}$
f_1	$\chi_{1,2}$
f_2	$\chi_{2,3}$
f_3	$\chi_{1,4}$
f_4	$\chi_{3,4}$

L'exemple suivant est beaucoup plus complexe. Il nous permettra d'observer la validité du théorème 3.4. En effet, dans ce cas, il y a plus de variables amassées que de variables de Plücker.

3.1.2 La grassmannienne $\text{Gr}(3,6)$

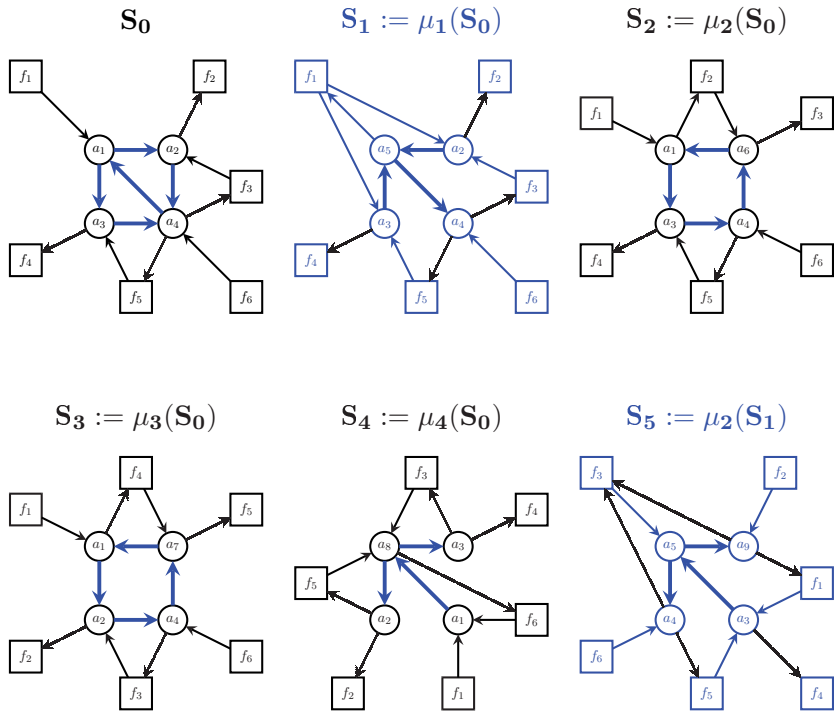
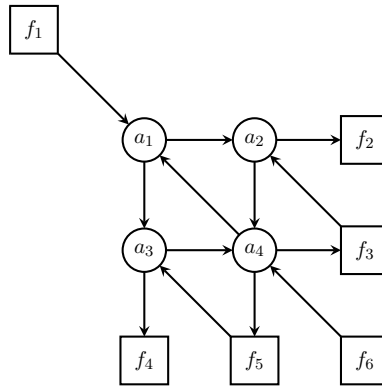
Pour construire la grassmannienne $\text{Gr}(3,6)$, nous devons établir une graine initiale de la forme indiquée par le théorème de Fomin, Zelevinsky et Scott (Théorème 3.4) :

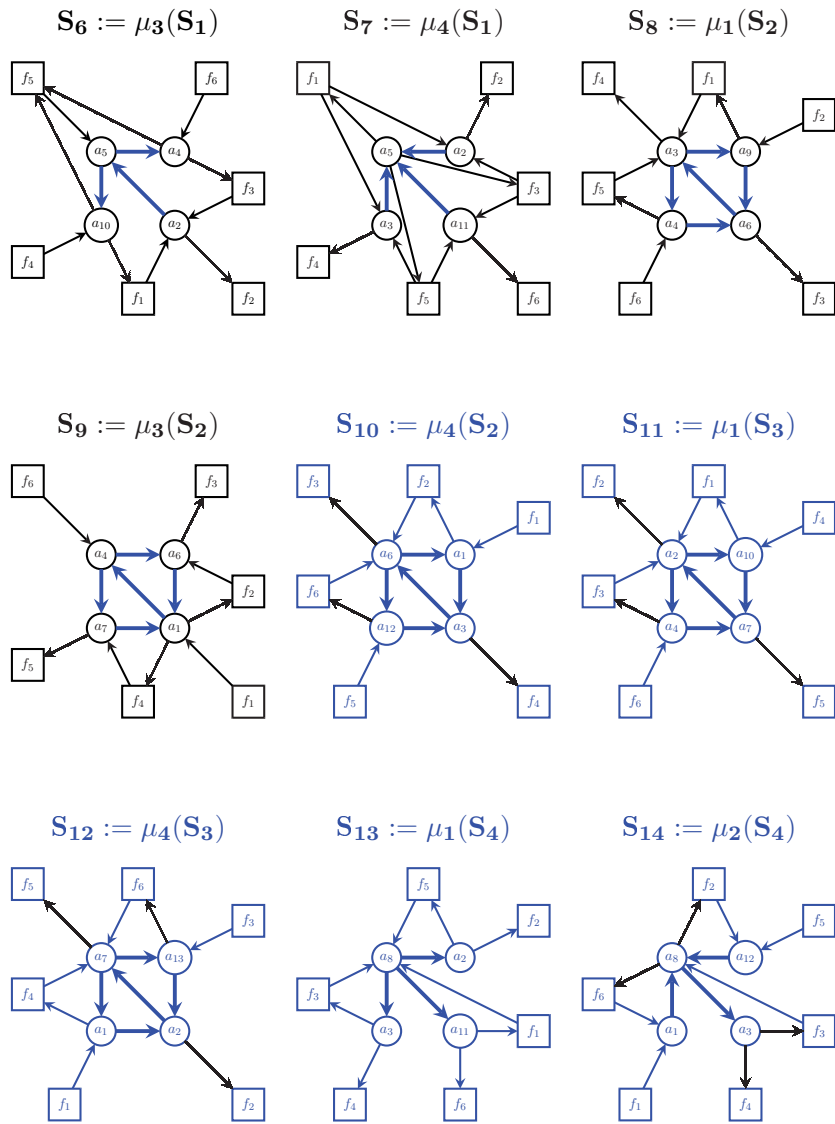
Soit un amas $\{a_1, a_2, a_3, a_4, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\} := x_0$.

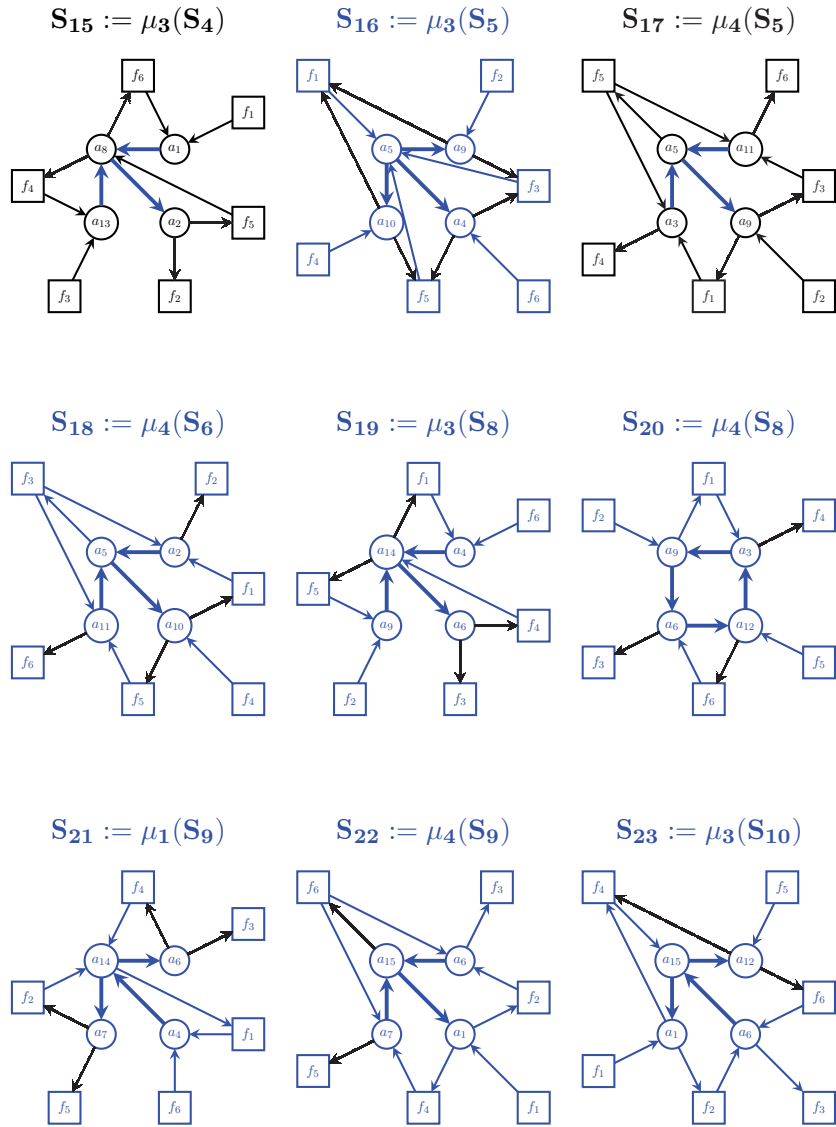
Soit une graine $S_0 := (Q_0, x_0)$ ayant la forme suivante :

Alors, si les sommets carrés qui sont associés aux variables f_i sont gelés, le théorème 3.4 indique que l'on peut obtenir l'anneau des coordonnées de la grassmannienne $\text{Gr}(3,6)$ en appliquant toutes les combinaisons de mutations possibles sur S_0 .

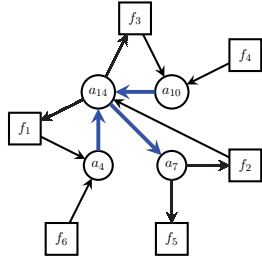
Voici une liste complète de toutes les graines obtenues de cette façon (à isomorphisme de graphe près) :



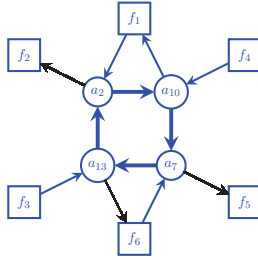




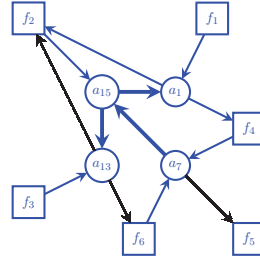
$$S_{24} := \mu_2(S_{11})$$



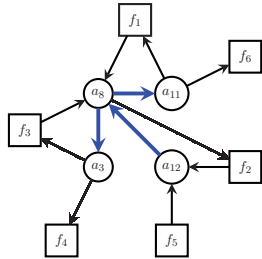
$$S_{25} := \mu_4(S_{11})$$



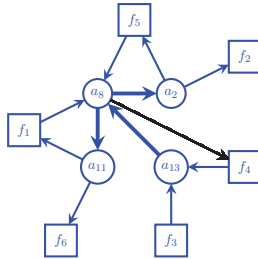
$$S_{26} := \mu_2(S_{12})$$



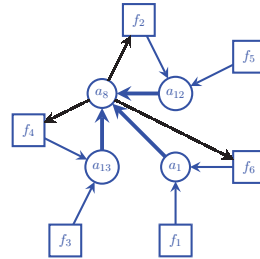
$$S_{27} := \mu_2(S_{13})$$



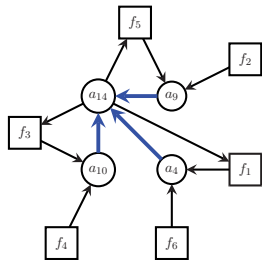
$$S_{28} := \mu_3(S_{13})$$



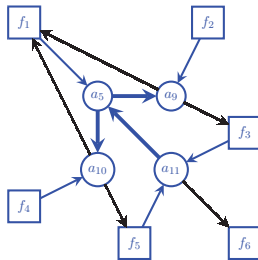
$$S_{29} := \mu_3(S_{14})$$



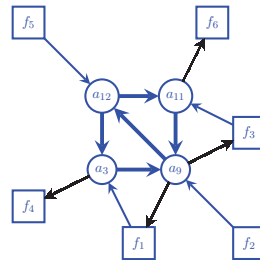
$$S_{30} := \mu_1(S_{16})$$

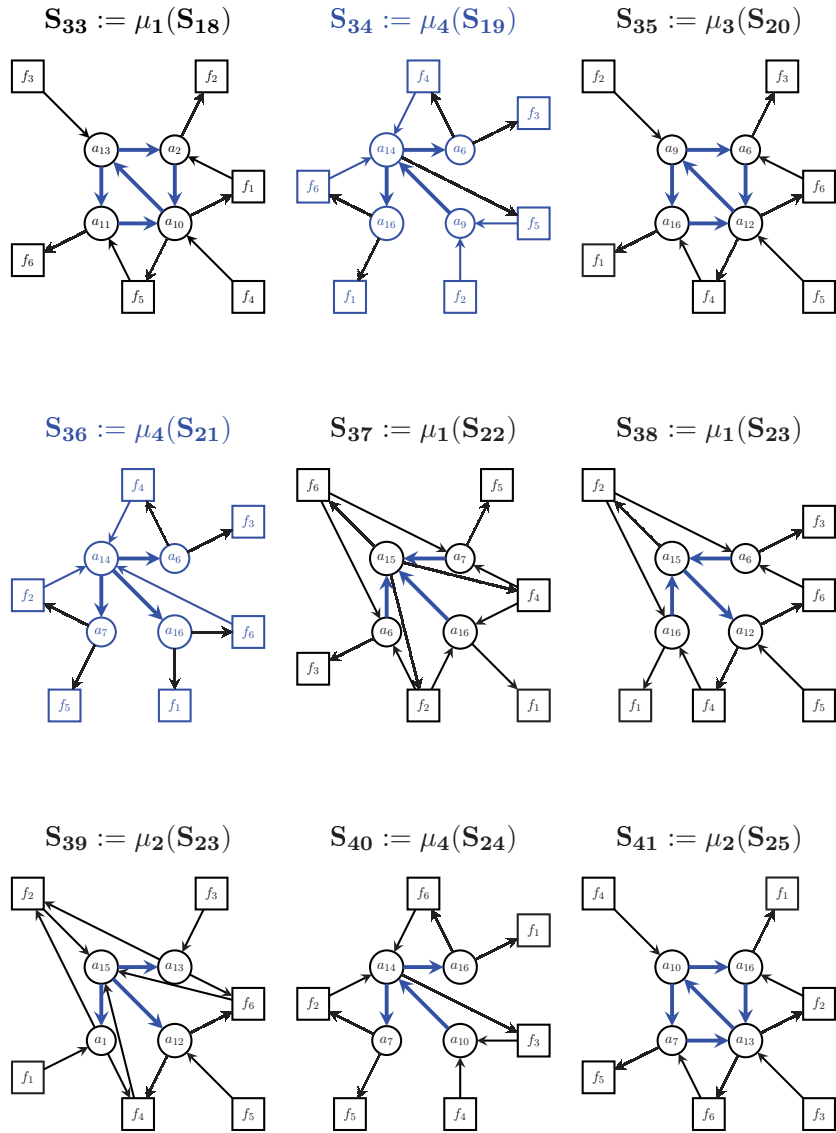


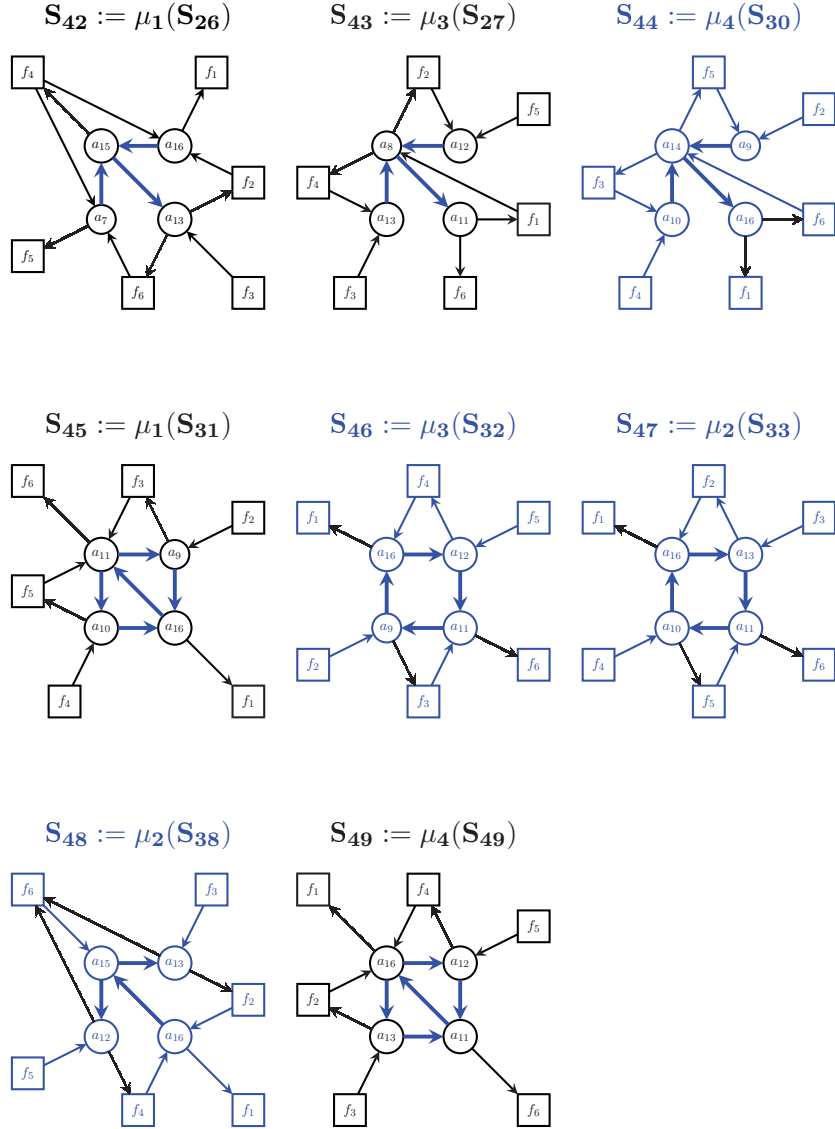
$$S_{31} := \mu_4(S_{16})$$



$$S_{32} := \mu_1(S_{17})$$







On a donc obtenu 50 graines différentes par mutations successives sur la graine S_0 . Il est intéressant de vérifier que toute autre combinaison de mutations appliquée à n'importe quelle de ces graines aura pour résultat une graine isomorphe à l'une ou l'autre de celles-ci. On a donc que l'anneau de coordonnées de la grassmannienne $\text{Gr}(3,6)$ est doté d'une structure d'algèbre amassée d'ordre finie. En effet, en observant le graphe de la graine S_1 , entre autres, on note que le sous-graphe composé des sommets mutables et des flèches les reliant (en bleu) est un graphe de Dynkin de type D_4 . Ceci vérifie donc le théorème 2.13.

Soit $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, \dots, a_{16}, f_1, f_2, \dots, f_6\}$, l'algèbre amassée générée par la grai-

ne S_0 .

De plus, les mutations appliquée lors de la construction de ces graines permet de déterminer les relations d'échange suivantes :

$$\begin{array}{lll}
a_1 \mathbf{a}_5 = a_4 f_1 + a_2 a_3 & a_2 \mathbf{a}_6 = a_1 f_3 + a_4 f_2 & a_3 \mathbf{a}_7 = a_1 f_5 + a_4 f_4 \\
a_4 \mathbf{a}_8 = a_1 f_3 f_5 + a_2 a_3 f_6 & a_2 \mathbf{a}_9 = a_5 f_2 + f_1 f_3 & a_3 \mathbf{a}_{10} = a_5 f_4 + f_1 f_5 \\
a_4 \mathbf{a}_{11} = a_5 f_6 + f_3 f_5 & a_4 \mathbf{a}_{12} = a_3 f_6 + a_6 f_5 & a_4 \mathbf{a}_{13} = a_2 f_6 + a_7 f_3 \\
a_3 \mathbf{a}_{14} = a_4 a_9 f_4 + a_6 f_1 f_6 & a_3 \mathbf{a}_{15} = a_1 a_{12} + a_6 f_4 & a_3 \mathbf{a}_{16} = a_9 f_4 + a_{12} f_1
\end{array}$$

De ces relations, on peut vérifier que chacune des variables de cette algèbre amassée peut être représentée par un polynôme de Laurent dont les termes sont composés des variables de l'amas initial x_0 :

$$\begin{array}{ll}
a_5 = \frac{a_4 f_1 + a_2 a_3}{a_1} & a_6 = \frac{a_1 f_3 + a_4 f_2}{a_2} \\
a_7 = \frac{a_1 f_5 + a_4 f_4}{a_3} & a_8 = \frac{a_1 f_3 f_5 + a_2 a_3 f_6}{a_4} \\
a_9 = \frac{a_1 f_1 f_3 + a_4 f_1 f_4 + a_2 a_3 f_2}{a_1 a_2} & a_{10} = \frac{a_1 f_1 f_5 + a_4 f_1 f_4 + a_2 a_3 f_4}{a_1 a_3} \\
a_{11} = \frac{a_1 f_3 f_5 + a_4 f_1 f_6 + a_2 a_3 f_6}{a_1 a_4} & a_{12} = \frac{a_1 f_3 f_5 + a_4 f_2 f_5 + a_2 a_3 f_6}{a_2 a_4} \\
a_{13} = \frac{a_1 f_3 f_5 + a_4 f_3 f_4 + a_2 a_3 f_6}{a_3 a_4} \\
a_{14} = \frac{a_1 a_4 f_1 f_3 f_4 + a_1 a_4 f_1 f_2 f_5 + a_2 a_3 a_4 f_2 f_4 + a_1^2 f_1 f_3 f_5 + a_4^2 f_1 f_2 f_4}{a_1 a_2 a_3} \\
a_{15} = \frac{a_1 a_4 f_3 f_4 + a_1 a_4 f_2 f_5 + a_1 a_2 a_3 f_6 + a_1^2 f_3 f_5 + a_4^2 f_2 f_4}{a_2 a_3 a_4} \\
a_{16} = \frac{a_1 a_4 f_1 f_3 f_4 + a_1 a_4 f_1 f_2 f_5 + a_1 a_2 a_3 f_1 f_6 + a_2 a_3 a_4 f_2 f_4 + a_1^2 f_1 f_3 f_5 + a_4^2 f_1 f_2 f_4}{a_1 a_2 a_3 a_4}
\end{array}$$

On peut donc constater que le phénomène de Laurent est vérifié dans le cas de la grassmanienne $\text{Gr}(3,6)$.

Ensuite, si on remplace respectivement les variables de l'amas initial,

$$x_0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\},$$

par un ensemble de variables de Plücker,

$$P_0 = \{X_{256}, X_{356}, X_{125}, X_{235}, X_{156}, X_{456}, X_{345}, X_{126}, X_{123}, X_{234}\},$$

dans les relations d'échanges obtenues précédemment, alors on obtient les nouvelles relations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
X_{256} \mathbf{a}_5 = X_{235} X_{156} + X_{356} X_{125} & X_{356} \mathbf{a}_6 = X_{256} X_{345} + X_{235} X_{456} \\
X_{125} \mathbf{a}_7 = X_{256} X_{123} + X_{235} X_{126} & X_{235} \mathbf{a}_8 = X_{256} X_{345} X_{123} + X_{356} X_{125} X_{234} \\
X_{356} \mathbf{a}_9 = a_5 X_{456} + X_{156} X_{345} & X_{125} \mathbf{a}_{10} = a_5 X_{126} + X_{156} X_{123}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
X_{235}\mathbf{a}_{11} = a_5 X_{234} + X_{345} X_{123} & X_{235}\mathbf{a}_{12} = X_{125} X_{234} + a_6 X_{123} \\
X_{235}\mathbf{a}_{13} = X_{356} X_{234} + a_7 X_{345} & X_{125}\mathbf{a}_{14} = X_{235} a_9 X_{126} + a_6 X_{156} X_{234} \\
X_{125}\mathbf{a}_{15} = X_{256} a_{12} + a_6 X_{126} & X_{125}\mathbf{a}_{16} = a_9 X_{126} + a_{12} X_{156}
\end{array}$$

En utilisant la courte relation de Plücker, on peut maintenant facilement associer une variable de Plücker à chacune des variables amassées de \mathcal{A} à l'exception de a_8 et a_{14} :

<i>V. amassée</i>	<i>V. Plücker</i>	<i>V. amassée</i>	<i>V. Plücker</i>
f_1	X_{156}	f_2	X_{456}
f_3	X_{345}	f_4	X_{126}
f_5	X_{123}	f_6	X_{234}
a_1	X_{256}	a_2	X_{356}
a_3	X_{125}	a_4	X_{235}
a_5	X_{135}	a_6	X_{245}
a_7	X_{236}	a_9	X_{145}
a_{10}	X_{136}	a_{11}	X_{134}
a_{12}	X_{124}	a_{13}	X_{346}
a_{15}	X_{246}	a_{16}	X_{146}

Enfin, à l'aide de manipulations algébriques élémentaires sur les variables amassées ou par manipulations en utilisant la relation de Plücker, on peut déterminer que les variables a_8 et a_{14} sont en fait une combinaison linéaire des autres variables :

$$\begin{array}{ll}
a_8 & = a_2 a_{12} - f_2 f_5 = X_{124} X_{356} - X_{123} X_{456} \\
a_{14} & = a_7 a_9 - f_2 f_5 = X_{145} X_{236} - X_{123} X_{456}
\end{array}$$

Nous avons donc, comme l'indiquait le théorème 3.4, plus de variables amassées que de variables de Plücker. Dans la section suivante, cet exemple nous permettra également d'observer la validité d'un autre théorème qui nous vient de la théorie de représentation.

4 Les algèbres inclinées amassées

Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov ont développé la théorie des catégories amassées [BMR⁺06] et des algèbres inclinées amassées qui reproduit la combinatoire des variables amassées par les objets inclinés amassés [BMR08].

Après avoir vu ce qu'est une algèbre inclinée et une algèbre inclinée amassée, le but de cette section sera tout d'abord de définir et apprendre à calculer la

dimension globale d'une algèbre. Afin de caractériser la dimension globale d'une algèbre inclinée et d'une algèbre inclinée amassée.

Nous terminerons en décrivant les carquois des algèbres inclinées amassées reliés à $\text{Gr}(3,6)$ comme illustration.

4.1 Notations et remarques

Notation 4.1. Pour la suite, k est un corps algébriquement clos.

Notation 4.2. On notera par $\text{Hom}_C(O, O')$ la classe des morphismes entre les deux objets O et O' de la catégorie C , et $\text{End}_C O = \text{Hom}_C(O, O)$.

Notation 4.3. On notera par $\text{rep } Q$ la catégorie ayant pour objets les représentations finies du carquois Q . C'est-à-dire toutes les réalisations du carquois Q dans la catégorie des k espaces vectoriels. Il s'agit de remplacer tous les sommets du carquois par des k espaces vectoriels et toutes les flèches par des applications k linéaires [ASS06].

Remarque 4.4. À noter que la catégorie $\text{rep } Q$ est équivalente à la catégorie des modules de type fini sur l'algèbre de chemins kQ .

Pour conclure ces remarques ; dans la suite, on aura besoin du bifoncteur Ext_C^n (voir [ASS06], Appendix, page 426, ou [Ass97], pour une définition).

4.2 Définitions

On commence par quelques définitions indispensables, où n est le nombre des sommets du carquois Q .

Définition 4.5. Un objet T de la catégorie $\text{rep } Q$ est *inclinant* si

1. $\text{Ext}_{\text{rep } Q}^1(T, T) = 0$
2. $|T| = n$, c'est-à-dire $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$ où les T_i sont deux à deux non isomorphes et indécomposables.

On notera par $\mathcal{C}(Q)$ la catégorie amassée du carquois Q qui est le quotient de la catégorie bornée dérivée \mathcal{D} des modules de type fini sur une algèbre héréditaire, par le foncteur $F = \tau^{-1}[1]$ où τ est la translation d'Auslander-Reiten et $[1]$ est le foncteur translation. Cette catégorie a été définie par Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov. L'idée principale qu'ils ont amené était d'élargir la catégorie $\text{rep } Q$. Le point important est que dans une telle catégorie on va pouvoir définir un objet inclinant de la même manière que dans la catégorie $\text{rep } Q$, ce qui mène au résultat principal dans [BMR⁺06].

Voir [BMR⁺06] pour plus de détails.

Définition 4.6. Un objet T de la catégorie amassée $\mathcal{C}(Q)$ est *inclinant-amassé* si

- 1) $\text{Ext}_{\mathcal{C}(Q)}^1(T, T) = 0$
- 2) $|T| = n$, c'est-à-dire $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$ où les T_i sont deux à deux non isomorphes et indécomposables.

Définition 4.7. Si T est un objet inclinant dans $\text{rep } Q$ alors $A = \text{End}(T, T) = \text{Hom}_{\text{rep } Q}(T, T)$ est une algèbre *inclinée*.

Définition 4.8. Si T est inclinant amassé alors $B = \text{End}(T) = \text{Hom}_{\mathbb{C}(Q)}(T, T)$ est une algèbre *inclinée amassée*.

Maintenant dans le but de définir la dimension globale d'une algèbre, on définit la dimension projective d'un module :

Définition 4.9. Soit M un module sur une algèbre A . Le plus petit entier n tel qu'il existe une résolution projective

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

est dite *la dimension projective* de M : $\text{dp } M = n$.

Si une telle résolution finie n'existe pas, on a $\text{dp } M = \infty$ et $\text{dp } 0 = -\infty$.

Exemple 4.10. Pour tout module projectif P on a $\text{dp } P = 0$.

D'une manière duale, on peut définir la dimension injective $\text{di } M$ d'un module M (voir [ASS06], Appendix, page 426, (b) ou [Ass97]).

Théorème 4.11 (voir [ASS06], Appendix A.4).

$$\text{dp } M = \sup\{n \mid \text{Ext}_A^n(M, -) \neq 0\}$$

Puis, voilà la définition de la dimension globale d'une algèbre :

Définition 4.12. Le plus grand entier n (s'il existe) tel qu'il existe deux A -modules M et N tel que $\text{Ext}_A^n(M, N) \neq 0$ est appelé *la dimension globale* de l'algèbre A : $\text{dim. gl. } A = n$.

Si un tel entier n'existe pas on dit que $\text{dim. gl. } A = \infty$ et $\text{dim. gl. } 0 = -\infty$

Théorème 4.13 ([ASS06], Appendix A.4). *Il existe une équivalence entre :*

1. $\text{dim. gl. } A \leq n$
2. $\text{dp } M \leq n$, pour tout M
3. $\text{di } M \leq n$, pour tout M .

Corollaire 4.14.

$$\text{dim. gl. } A = \sup\{\text{dp } M\} = \sup\{\text{di } M\}$$

Exemple 4.15. Une algèbre A est semi simple si et seulement si $\text{dim. gl. } A = 0$.

Théorème 4.16 (Auslander). (*Théorème 2.5, [Ass97] page 281*)

$$\text{dim. gl. } A = \sup\{\text{dp } A/I \mid I \text{ idéal de } A\}$$

Corollaire 4.17.

$$\dim. \text{gl. } A = \sup\{\text{dp } M \mid M \text{ de type fini}\}$$

Théorème 4.18. *Si l'algèbre A est artinienne alors*

$$\dim. \text{gl. } A = \sup\{\text{dp } S \mid S \text{ module simple}\}$$

Cette simplification est vraiment utile étant donné qu'il existe un nombre fini de A -modules simples non isomorphes sur une algèbre artinienne. Les calculs deviennent donc faisables.

Maintenant que nous avons tout le nécessaire, énonçons le théorème suivant caractérisant la dimension globale des algèbres inclinées :

Théorème 4.19 (Happel, Ringel ([HR82])). *On considère l'algèbre héréditaire KQ . Soient T_{KQ} un objet incliné et $A = \text{End}_{KQ} T$ une algèbre inclinée.*

Alors $\dim. \text{gl. } A \leq 2$ et pour tout A -module indécomposable Z , on a $\text{dp } Z \leq 1$ et $\text{di } Z \leq 1$.

Passons au cas inclinée amassée :

Théorème 4.20 (Keller, Reiten ([KR07])). *Une algèbre inclinée amassée B est 1-Gorenstein, c'est-à-dire que $\text{dp } I \leq 1$ pour tout A -module injectif I et $\text{di } P \leq 1$ pour tout A -module projectif P .*

Corollaire 4.21 (KR). *Tout B -module M est soit de dimension projective infinie, soit tel que $\text{dp } M \leq 1$.*

Preuve : Supposons que $\text{dp } M = n < \infty$ et montrons que $n \leq 1$.

On notera $\Omega M = \Omega^1 M$ le noyau (nommé le premier syzygy de M) de l'épimorphisme

$$0 \rightarrow \Omega M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

où P est projectif.

Comme on a supposé que $\text{dp } M = n$ alors $\Omega^n M$ est projectif

$$0 \rightarrow \Omega^n M = P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

Comme $\Omega^n M$ est un B -module projectif et l'algèbre B est Gorenstein, alors par le théorème 4.20 $\text{di } (\Omega^n M) \leq 1$; on la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Omega^n M \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \Omega^{n-1} \rightarrow 0$$

$$\text{di } (\Omega^{n-1}) \leq \sup\{\text{di } \Omega^n - 1, \text{di } P_{n-1}\} = \sup\{0, 1\} = 1 \leq 1.$$

Par récurrence sur $p \leq 0$, on trouve que Ω^{n-p} est de $\text{di } \Omega^{n-p} \leq 1$.

D'où pour $p = n$

$$\text{di } (\omega^0 M) = \text{di } M \leq 1 \leq \infty.$$

De façon duale, on suppose que $\text{di } M \leq \infty$ et on obtient que $\text{dp } M \leq 1$. □

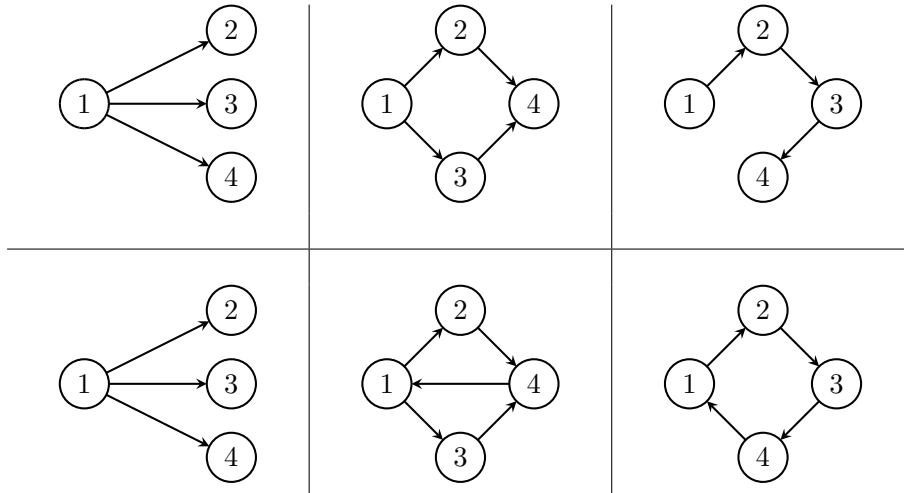
De même se démontre le corollaire suivant :

Corollaire 4.22. *Tout B -module est soit de dimension injectif infinie, soit tel que $\dim M \leq 1$.*

Par le théorème 4.13, ceci caractérise clairement la dimension globale d'une algèbre inclinée amassée.

Illustrons les caractérisations précédentes par des exemples :

Exemple 4.23. Motivés par le fait que la grassmannienne $\text{Gr}(3,6)$ est finie de type D_4 , nous avons pris le carquois de type D_4 et nous avons calculé tous les objets inclinants et tous les objets inclinants amassés de type D_4 (c'est-à-dire les objets dans la catégorie $\text{rep } Q$ pour $Q = D_4$). Ensuite, nous avons calculés leurs anneaux d'endomorphismes. De cette manière, on a obtenu toutes les algèbres inclinées et inclinées amassées de type D_4 . Dans le tableau ci-dessous, nous présentons leurs carquois (Les algèbres de la première ligne sont des algèbres inclinées alors que celles de la deuxième ligne sont des algèbres inclinées amassées.) :



Elles ont pour dimensions globales respectives : $\dim. \text{gl. } A = 1, 2$ et 2 alors que $\dim. \text{gl. } B = 1, \infty$ et ∞ , ce qui vérifie clairement les théorème de caractérisation déjà énoncés plus haut.

On observe le miracle déjà prédit par Buan, Marsh, et Reiten[BMR08] : ces carquois de la deuxième ligne sont exactement les carquois bleus des graines du type $\text{Gr}(3,6)$ qu'on a déjà calculé ; voir les diagrammes de la sous-section 3.1.2.

Remarquons que les algèbres inclinées amassées possèdent plus de flèches que celles inclinées. Ceci est dû au fait qu'on forme notre anneau d'endomorphismes dans une catégorie plus large.

Références

[Ass97] Ibrahim ASSEM : *Algèbres et modules*. Masson, Paris, 1997.

- [ASS06] Ibrahim ASSEM, Daniel SIMSON et Andrzej SKOWROŃSKI : *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 de *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.
- [BMR⁺06] Aslak Bakke BUAN, Robert MARSH, Markus REINEKE, Idun REITEN et Gordana TODOROV : Tilting theory and cluster combinatorics. *Adv. Math.*, 204(2):572–618, 2006.
- [BMR08] Aslak Bakke BUAN, Robert J. MARSH et Idun REITEN : Cluster mutation via quiver representations. *Comment. Math. Helv.*, 83(1): 143–177, 2008.
- [FZ02] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.
- [HR82] Dieter HAPPEL et Claus Michael RINGEL : Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):399–443, 1982.
- [KR07] Bernhard KELLER et Idun REITEN : Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau. *Adv. Math.*, 211(1):123–151, 2007.

SOUHEILA HASSOUN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Souheila.Hassoun@USherbrooke.ca

DENIS LANGFORD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Denis.Langford@USherbrooke.ca

FRÉDÉRIC LANGLOIS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Frédéric.Langlois@USherbrooke.ca