

CAMUS

Volume 5 Cahiers mathématiques de
l'Université de Sherbrooke

V. Bazier-Matte et M. Barbe Marcoux 1
Semi-anneaux, semi-corps et leurs propriétés

L. Marchand 23
*Les qualifications des contraintes en optimisation à
contraintes non linéaires*

C. Masson et J.-P. Morissette 37
Quadrilatères et pentagones dans le graphe d'échange

Y. Lebrun 71
*Sur le diamètre du graphe d'échange de l'algèbre
amassée de type D_n*

Semi-anneaux, semi-corps et leurs propriétés

Véronique Bazier-Matte et Mélissa Barbe Marcoux

RÉSUMÉ Dans cet article, nous définissons les semi-anneaux et les semi-corps, qui s'apparentent aux anneaux et aux corps, mais dans lesquels les inverses additifs n'existent pas nécessairement, et nous étudions leurs propriétés. Par la suite, nous nous intéressons au concept d'idéaux de semi-anneaux. Finalement, nous nous penchons sur les algèbres de Boole et les treillis et nous observons leurs liens avec les semi-anneaux.

1 Introduction

Les semi-anneaux et les semi-corps sont des structures algébriques semblables aux anneaux et aux corps, mais sans inverse additif. Ils sont à la base de la géométrie tropicale. Un des exemples les plus simples de ce genre de structure est l'ensemble des nombres naturels muni de l'addition et la multiplication usuelles. Il n'est donc pas étonnant qu'il s'agisse du premier exemple de semi-anneau étudié historiquement. La définition des semi-anneaux a été introduite formellement par Vandiver en 1934 [Van39], mais Dedekind [Ded96] avait déjà étudié quelques exemples à la fin du XIX^e siècle. La théorie des semi-anneaux a commencé à se développer véritablement au début des années 50, alors que celle des semi-corps a commencé au début des années 60 [RV04].

L'étude des semi-anneaux permet de travailler sur des structures sans inverse additif. Ainsi, nous généralisons le concept d'idéal, développé initialement pour les anneaux, au cadre des semi-anneaux. Il est également possible d'établir des liens avec les treillis et algèbres de Boole, qui possèdent de nombreuses applications.

2 Définitions

Commençons par définir les semi-anneaux. Il existe plusieurs définitions différentes dans la littérature scientifique. Celle que nous avons choisi d'utiliser ici est celle de Kala et Korbelář [KK10], qui est plus générale que la plupart des autres définitions existantes.

Nous aimerions remercier chaleureusement MM. Ibrahim Assem, professeur à l'Université de Sherbrooke, et Juan Carlos Bustamante, chargé de cours, pour leur aide et leur supervision qui ont permis l'écriture de cet article durant notre cours d'initiation à la recherche.

Définition 2.1. Un *semi-anneau* est un triplet (S, \oplus, \odot) où S est un ensemble non vide et \oplus, \odot sont des opérations sur S appelées respectivement l'*addition* et la *multiplication*. L'addition est commutative et associative, tandis que la multiplication est associative. De plus, la multiplication se distribue à gauche et à droite sur l'addition, c'est-à-dire que, pour tous $a, b, c \in S$, on a $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ et $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$.

Pour alléger la lecture, notons un semi-anneau S plutôt que (S, \oplus, \odot) .

Exemple 2.2.

- a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ où $+$ et \cdot représentent respectivement l'addition et la multiplication usuelles des entiers est un semi-anneau. Par la suite, nous écrirons simplement \mathbb{N} .
- b) L'ensemble des réels \mathbb{R} muni des deux opérations suivantes est un semi-anneau : l'addition est $a \oplus b = \max(a, b)$, le plus grand des deux réels a et b , et la multiplication est $a \odot b = a + b$. En effet, $\max(a, \max(b, c)) = \max(a, b, c) = \max(\max(a, b), c)$, ce qui établit l'associativité de l'addition. Il est clair qu'elle est aussi commutative, et que la multiplication est associative.

Il reste à vérifier que les deux opérations sont compatibles. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et supposons sans perte de généralité que $b \leq c$. Donc, $a + b \leq a + c$. D'où

$$a \odot (b \oplus c) = a + \max(b, c) = a + c = \max(a + b, a + c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

De la même façon, nous obtenons que $\max(a, b) + c = \max(a + c, b + c)$.

- c) Soit X un ensemble non-vidé et soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . Alors, $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ est un semi-anneau où \cup et \cap représentent respectivement l'union et l'intersection entre deux ensembles. En effet, \cup est une opération associative et commutative sur $\mathcal{P}(X)$, tandis que \cap est une opération associative sur $\mathcal{P}(X)$. Par ailleurs, soit $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Comme

$$(B \cup C) \cap A = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

l'intersection \cap se distribue sur l'union \cup .

De même, \cup se distribue également sur \cap et \cap est une opération commutative sur $\mathcal{P}(X)$. Ainsi, nous aurions pu définir l'addition sur $\mathcal{P}(X)$ comme étant plutôt \cap et la multiplication comme étant plutôt \cup et nous aurions obtenu aussi un semi-anneau.

Les propriétés de ces opérations amènent au concept d'algèbre de Boole, étudié à la section 5. Remarquons donc au passage que $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ constitue un exemple d'algèbre de Boole.

Remarque 2.3. Certains auteurs tels que Assem et Dupont [AD13], Bistarelli et Gaducci [BG06], Fenga, Jun, Zhaoc [FJZ08] définissent les semi-anneaux en exigeant en outre que (S, \oplus) soit un monoïde commutatif avec l'élément neutre 0, que (S, \odot) soit un monoïde avec l'élément neutre 1 et que $0 \odot a = a \odot 0$ pour tout $a \in S$.

3 Préliminaires

Définissons à présent plusieurs propriétés que peuvent posséder les semi-anneaux et observons les liens entre ces propriétés.

Définition 3.1. Soit S un semi-anneau.

- a) Le semi-anneau S est *idempotent additivement* (ou simplement *idempotent*) si $a \oplus a = a$ pour tout $a \in S$.
- b) Par ailleurs, S est *absorbant* si $a \oplus (a \odot b) = a = a \oplus (b \odot a)$ pour tous $a, b \in S$. L'opération \oplus est alors dite *absorbante* sur \odot .
- c) Finalement, S est *commutatif* si $a \odot b = b \odot a$ pour tous $a, b \in S$.

Exemple 3.2.

- a) \mathbb{N} est un semi-anneau commutatif, mais il n'est ni idempotent, ni absorbant.
- b) $(\mathbb{R}, \max, +)$ est un semi-anneau idempotent, commutatif mais non absorbant. En effet, $\max(a, a) = a$ et $\max(a, b) = \max(b, a)$. De plus, si $b > 0$, alors $\max(a, a + b) \neq a$. Toutefois, $(\mathbb{R}_-, \max, +)$ est un semi-anneau absorbant.
- c) $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ est un semi-anneau idempotent, absorbant et commutatif.

Les propriétés suivantes se retrouvent dans les travaux de Rudeanu et Vaida [RV04].

Définition 3.3. Soit S un semi-anneau.

- a) Un élément $g \in S$ est appelé un *plus grand élément* si $a \oplus g = g$ pour tout $a \in S$.
- b) Un élément $e \in S$ est appelé une *identité multiplicative* si $a \odot e = a = e \odot a$ pour tout $a \in S$.
- c) Un élément $p \in S$ est appelé un *plus petit élément* si $a \oplus p = a$ pour tout $a \in S$.
- d) Un élément $z \in S$ est appelé un *zéro* si $a \odot z = z = z \odot a$ pour tout $a \in S$.

Lemme 3.4. *S'il existe dans un semi-anneau un plus grand élément (ou une identité multiplicative, ou un plus petit élément, ou un zéro), alors celui-ci est unique.*

Démonstration. Soit g_1 et g_2 deux plus grands éléments dans le même semi-anneau. Par définition, $g_1 = g_1 \oplus g_2 = g_2$ car l'addition est commutative. L'unicité des plus petits éléments se vérifie de la même façon. De même, soit e_1 et e_2 deux identités multiplicatives. Par définition, $e_1 = e_1 \odot e_2 = e_2$. La démonstration de l'unicité des zéros est identique. \square

Exemple 3.5.

- a) Dans \mathbb{N} , 1 est l'identité multiplicative et 0 est le plus petit élément et le zéro. Toutefois, ce semi-anneau ne possède pas de plus grand élément.

Considérons à présent $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +, \cdot)$ où convenons que $a + \infty = \infty$ et $a \cdot \infty = \infty = \infty \cdot a$. Avec cette définition, il s'agit d'un semi-anneau avec le plus grand élément $g = \infty$.

Finalement, considérons $(\{a \in \mathbb{N} \mid a > 1\}, +, \cdot)$. Il est facile de vérifier que ce triplet satisfait aux axiomes de définition d'un semi-anneau. Il s'agit d'un semi-anneau sans plus grand élément, ni identité multiplicative, ni plus petit élément, ni zéro.

- b) $(\mathbb{R}, \max, +)$ est un semi-anneau avec l'identité multiplicative $e = 0$, mais sans plus grand élément, ni zéro, ni plus petit élément.

En considérant $(\mathbb{R}_+^*, \max, +)$, nous obtenons un semi-anneau sans identité multiplicative.

Étudions plutôt $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ tel que $-\infty \leq a$ et $-\infty + a = -\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. L'élément $-\infty$ est le zéro et le plus petit élément de ce semi-anneau, car $a + -\infty = -\infty$ et $\max(a, -\infty) = a$ pour tout a .

De même, soit, $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \max, +)$. Il s'agit d'un semi-anneau avec le plus grand élément $g = \infty$ puisque $\max(a, \infty) = \infty$ pour tout a .

- c) $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ contient un plus grand élément X , qui est aussi l'identité multiplicative. Il contient également un plus petit élément et un zéro, \emptyset .

Contrairement à ce que peuvent laisser croire les derniers exemples, le zéro et le plus petit élément d'un semi-anneau ne sont pas nécessairement égaux. Dans l'exemple suivant, le semi-anneau possède un plus petit élément qui n'est pas un zéro.

Exemple 3.6. Notons $S = [0, \infty] \times [0, \infty]$. Soit (S, \min, \odot) où

$$\begin{aligned} \min : \quad S \times S &\longrightarrow S \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto (\min(x_1, x_2), \min(y_1, y_2)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \odot : \quad S \times S &\longrightarrow S \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto (x_1, y_2). \end{aligned}$$

Il est clair que \min est associatif et commutatif et que \odot est associative. Vérifions la distributivité.

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \odot \min((x_2, y_2), (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) \odot (\min(x_2, x_3), \min(y_2, y_3)) \\ &= (x_1, \min(y_2, y_3)) \\ &= (\min(x_1, x_1), \min(y_2, y_3)) \\ &= \min((x_1, y_2), (x_1, y_3)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \odot \min((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \\ = \min((x_1, y_1) \odot (x_2, y_2), (x_1, y_1) \odot (x_3, y_3)). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \min((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \odot (x_3, y_3) \\ = \min((x_1, y_1) \odot (x_3, y_3), (x_2, y_2) \odot (x_3, y_3)). \end{aligned}$$

Ainsi, (S, \min, \odot) est un semi-anneau. Il possède (∞, ∞) comme plus petit élément, car $\min((x, y), (\infty, \infty)) = (x, y)$. Cependant, $(x, y) \odot (\infty, \infty) \neq (\infty, \infty)$ si $y \neq \infty$.

Remarquons que ce semi-anneau ne possède pas de zéro.

Au même titre que les anneaux, les semi-anneaux peuvent posséder des éléments inversibles, définis ci-dessous. Cette définition sert d'ailleurs de base à la définition des semi-corps, voir [VC09].

Définition 3.7. Soit S un semi-anneau possédant une identité multiplicative notée e .

- a) Un élément $a \in S$ est *inversible* s'il existe $b \in S$ tel que $a \odot b = e = b \odot a$. L'élément b est appelé l'*inverse* de a et est noté a^{-1} .
- b) Un *semi-corps* T est un semi-anneau (T, \oplus, \odot) dans lequel chaque élément différent du zéro s'il existe est inversible.

Remarque 3.8. Si l'inverse d'un élément existe, alors il est unique. En effet, supposons qu'il existe deux inverses de a notés b et c . Alors, $b = b \odot a \odot c = c$.

Exemple 3.9.

- a) Le seul élément inversible de \mathbb{N} est 1, d'inverse 1.
- b) Dans $(\mathbb{R}, \max, +)$, chaque élément x est inversible d'inverse $-x$, ce qui fait de ce semi-anneau un semi-corps.
- c) Mis à part X , aucun élément de $\mathcal{P}(X)$ n'est inversible. L'inverse de X est donc X .

Il est également possible de définir une relation d'ordre sur les semi-anneaux. Donnons donc d'abord une définition des ensembles partiellement ordonnés à partir de laquelle nous construirons celle des semi-anneaux partiellement ordonnés, voir [KS85].

Définition 3.10. Soit E un ensemble. Une relation \leq sur E est appelée une relation d'*ordre partiel* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. L'ensemble E muni de l'ordre partiel \leq est alors dit *partiellement ordonné* par cette relation.

Définition 3.11. Un semi-anneau S est dit *partiellement ordonné* si l'ensemble S est partiellement ordonné sous une relation \leq et si pour tous $a, b, c \in S$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- a) si $a \leq b$, alors $a \oplus c \leq b \oplus c$;
- b) si $a \leq b$, alors $a \odot c \leq b \odot c$ et $c \odot a \leq c \odot b$.

Remarque 3.12. En vertu de cette définition des semi-anneaux partiellement ordonnés, la relation \leq est compatible avec les opérations \oplus et \odot .

Exemple 3.13.

- a) \mathbb{N} et $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ sont des semi-anneaux partiellement ordonnés par l'ordre usuel.
- b) $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ est également un semi-anneau ordonné par l'inclusion \subseteq .

Les définitions ci-dessous sont données par [AD13].

Définition 3.14. Soit S un semi-anneau.

- a) Si S possède un plus petit élément p , alors S est *non-négatif* si $a \oplus b = p$ implique $a = p = b$ pour tous $a, b \in S$.
- b) Si S est commutatif et possède un zéro z , alors S est *intègre* si $a \odot b = z$ implique $a = z$ ou $b = z$ pour tous $a, b \in S$.

Exemple 3.15.

- a) Contrairement à $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, \mathbb{N} , $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ et $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ sont des semi-anneaux non-négatifs.
- b) En outre, \mathbb{N} et $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ sont des semi-anneaux intègres alors que $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ n'est pas intègre.

Définition 3.16. Soit S un semi-anneau. Un élément $a \in S$ est *régulier* si l'égalité $a \oplus b = a \oplus c$ implique $b = c$ pour tout $b, c \in S$. Si tous les éléments de S sont réguliers, alors le semi-anneau est *régulier*.

Exemple 3.17. Le semi-anneau \mathbb{N} est régulier, alors que ce n'est pas le cas pour les semi-anneaux $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ et $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

Les propositions suivantes relient les différentes propriétés des semi-anneaux. En particulier, la proposition ci-dessous (énoncée par [RV04], [BG06]) énumère quelques propriétés des semi-anneaux absorbants tandis que la suivante explicite une condition pour obtenir un semi-anneau absorbant.

Proposition 3.18. Soit S un semi-anneau absorbant.

- a) Si S possède une identité multiplicative e , alors e est également le plus grand élément de S et S est idempotent.

b) Le semi-anneau S possède un plus petit élément si et seulement s'il possède un zéro. En outre, ces éléments sont égaux.

Démonstration.

a) Soit $e \in S$ l'identité multiplicative de S . Comme S est absorbant, $a = a \oplus (a \odot b)$ pour tous $a, b \in S$. En particulier, nous obtenons $e = e \oplus (e \odot b)$, d'où $e = e \oplus b$ pour tout b , ce qui fait de e un plus grand élément.

En utilisant encore la propriété d'absorption, $a = a \oplus (e \odot a) = a \oplus a$ pour tout a . Ainsi, S est idempotent.

b) Soit $p \in S$ le plus petit élément de S . Comme S est absorbant, $p \oplus (p \odot a) = p = p \oplus (a \odot p)$, ce qui implique $p \odot a = p = a \odot p$.

À présent, supposons que z est un zéro. L'absorption de S implique aussi $a = a \oplus (a \odot z)$, c'est-à-dire $a = a \oplus z$ pour tout a .

□

Proposition 3.19. *Un semi-anneau qui possède un plus grand élément qui est l'identité multiplicative est absorbant.*

Démonstration. Montrons que $a \oplus (a \odot b) = a = a \oplus (b \odot a)$ pour tous $a, b \in S$. Soit g le plus grand élément et l'identité multiplicative de S . Nous avons

$$a \oplus (a \odot b) = (a \odot g) \oplus (a \odot b) = a \odot (g \oplus b) = a \odot g = a.$$

De la même façon, nous obtenons que $a \oplus (b \odot a) = a$.

□

Exemple 3.20. Soit $S = \{0, 1, 2\}$ avec les opérations $x \oplus y = \min(x + y, 2)$ et $x \odot y = \min(xy, 2)$ pour tous $x, y \in S$. Il est clair que \oplus est associatif et commutatif, de même que \odot est associatif. Montrons que \odot se distribue sur \oplus . Pour tous $x, y, z \in S$, nous avons

$$\begin{aligned} x \odot (y \oplus z) &= \min(x \cdot \min(y + z, 2), 2) \\ &= \min(x(y + z), 2x, 2) \\ &= \min(xy + xz, 2) \\ &= \min(xy + xz, xy + 2, xz + 2, 2) \\ &= \min(\min(xy + 2) + \min(xz + 2), 2) \\ &= (x \odot y) \oplus (x \odot z). \end{aligned}$$

Il en va de même pour la distributivité à droite. Ainsi, S est un semi-anneau. De plus, $x \oplus 2 = \min(x + 2, 2) = 2$ implique que 2 est le plus grand élément de S et $1 \odot x = \min(1 \cdot x, 2) = \min(x, 2) = x$ que 1 est l'identité multiplicative.

Remarquons que $1 \oplus (1 \odot 1) = 2 \neq 1$, donc S n'est pas absorbant.

La proposition suivante établit un lien entre les éléments réguliers et inversibles dans les semi-anneaux [AD13].

Proposition 3.21. *Soit S un semi-anneau et $e \in S$ l'identité multiplicative. Si e est régulier, alors tous les éléments inversibles de S le sont également.*

Démonstration. Soit $a, b, c \in S$ tels que a est inversible et $a \oplus b = a \oplus c$. Comme $a \odot a^{-1} = e$, en multipliant à droite chaque côté par a^{-1} et en distribuant, nous obtenons $e \oplus (a^{-1} \odot b) = e \oplus (a^{-1} \odot c)$. On sait que e est régulier, donc $a^{-1} \odot b = a^{-1} \odot c$ et ainsi $b = c$, ce qui fait de a un élément régulier. \square

Le lemme ci-dessous concerne les semi-corps et servira à étudier l'ordre d'un semi-corps, voir [VC09].

Lemme 3.22. *Soit T un semi-corps et a, b et $c \in T$. Si $a \oplus b \oplus c = a$, alors $a \oplus b = a$.*

Démonstration. Soit T un semi-corps et a, b et $c \in T$ tels que $a \oplus b \oplus c = a$. En multipliant à droite chaque côté de l'égalité par $a^{-1} \odot b \odot a^{-1}$ et en additionnant $c \odot a^{-1}$, nous obtenons

$$(b \odot a^{-1}) \oplus (b \odot a^{-1} \odot b \odot a^{-1}) \oplus (c \odot a^{-1} \odot b \odot a^{-1}) \oplus (c \odot a^{-1}) = (b \odot a^{-1}) \oplus (c \odot a^{-1}).$$

En vertu de la propriété de distributivité, il est possible de réécrire cette égalité :

$$(b \odot a^{-1} \oplus c \odot a^{-1}) \odot (1 \oplus b \odot a^{-1}) = b \odot a^{-1} \oplus c \odot a^{-1}.$$

Il suffit donc de multiplier à gauche par $(b \odot a^{-1} \oplus c \odot a^{-1})^{-1}$ et à droite par a pour obtenir

$$a \oplus b = a. \quad \square$$

Les prochaines propositions concernent les semi-anneaux partiellement ordonnés. Dans la première proposition, une propriété des semi-anneaux partiellement ordonnés est montrée, tandis que la deuxième fournit des conditions suffisantes pour obtenir un semi-anneau partiellement ordonné.

Proposition 3.23. *Si un semi-anneau est partiellement ordonné et possède un plus petit élément, alors il est non-négatif.*

Démonstration. Soit S un semi-anneau partiellement ordonné, p son plus petit élément et $a, b \in S$ tel que $a \oplus b = p$. D'une part, nous savons que $p \leq a \leq a \oplus b$ et d'autre part, nous savons que $p \leq b \leq a \oplus b$. Comme $a \oplus b = p$, il est possible de déduire que $p \leq a \leq p$ et $p \leq b \leq p$. Ainsi, S est non négatif. \square

Proposition 3.24.

- a) *Tout semi-anneau idempotent est partiellement ordonné.*
- b) *Tout semi-anneau régulier et non négatif est partiellement ordonné.*
- c) *Tout semi-corps est partiellement ordonné.*

Démonstration.

- a) Supposons que S est un semi-anneau idempotent et définissons la relation \leq sur S par $a \leq b$ si et seulement si $a \oplus b = b$.

Montrons que \leq est un ordre partiel sur S . En vertu de l'idempotence $a \oplus a = a$ implique que $a \leq a$ pour tout $a \in S$. Aussi, $a \leq b$ et $b \leq a$ donnent $a \oplus b = b$ et $b \oplus a = a$, d'où $a = b$. Enfin, $a \leq b$ et $b \leq c$ entraînent $a \oplus b = b$ et $b \oplus c = c$, d'où $a \oplus c = a \oplus b \oplus c = b \oplus c = c$ et alors $a \leq c$.

Il faut aussi montrer que cet ordre partiel est compatible avec les opérations de S . D'une part, $a \leq b$ implique $a \oplus b = b$ et il en découle, en vertu de l'idempotence, que $b \oplus c = a \oplus b \oplus c = a \oplus c \oplus b \oplus c$ et donc, $a \oplus c \leq b \oplus c$. D'autre part, $a \odot c \oplus b \odot c = b \odot c$ et $c \odot a \oplus c \odot b = c \odot b$, d'où $a \odot c \leq b \odot c$ et $c \odot a \leq c \odot b$.

- b) Supposons que S est non-négatif et définissons la relation \leq par $a \leq b$ si et seulement s'il existe $c \in S$ tel que $a \oplus c = b$.

Montrons que \leq est une relation d'ordre. Puisque S est non-négatif, il possède un plus petit élément p . Nous savons que $a \oplus p = a$ donc $a \leq a$ pour tout $a \in S$. Montrons à présent l'antisymétrie de la relation. Soit $a, b \in S$ tels que $a \leq b$ et $b \leq a$. Ceci implique qu'il existe $c, d \in S$ tels que $a \oplus c = b$ et $b \oplus d = a$. En substituant b dans la deuxième égalité, nous obtenons $a \oplus c \oplus d = a$, d'où il est possible de déduire que $c \oplus d = p$ en vertu de la régularité de S . Ainsi, $c = p = d$ car S est non-négatif, ce qui prouve $a = b$ et donc la relation est antisymétrique. Par ailleurs, soit $a, b, c \in S$ tels que $a \leq b$ et $b \leq c$. Ainsi, il existe $x, y \in S$ tels que $a \oplus x = b$ et $b \oplus y = c$. Or, $a \oplus (x \oplus y) = (a \oplus x) \oplus y = b \oplus y = c$. Donc, nous avons $a \leq c$.

Il faut également prouver que cet ordre fait de S un semi-anneau partiellement ordonné. Prenons $a, b, c \in S$ tels que $a \leq b \leq c$. Donc, il existe $d \in S$ tel que $a \oplus d = b$. Puisque $a \oplus c \oplus d = b \oplus c$ et $c \odot a \oplus c \odot d = c \odot (a \oplus d) = c \odot b$, nous en déduisons que $a \oplus c \leq b \oplus c$ et $c \odot a \leq c \odot b$. Il en est de même pour la multiplication par c à droite.

- c) Soit T un semi-anneau dont l'identité multiplicative est notée e . Définissons la relation \leq ainsi : $a \leq b$ si et seulement si $a = b$ ou s'il existe $c \in T$ tel que $a \oplus c = b$.

Trivialement, cette relation est réflexive. Afin de montrer l'antisymétrie, prenons a et $b \in T$ tels que $a \leq b$ et $b \leq a$ et supposons qu'il existe c et $d \in T$ tels que $a \oplus c = b$ et $b \oplus d = a$. Nous savons que $a \oplus c \oplus d = b \oplus d = a$, d'où nous déduisons, en vertu du lemme 3.22, que $a \oplus c = a$, ce qui donne $b = a$. Prenons à présent a, b et $c \in T$ tels que $a \leq b \leq c$ pour prouver la transitivité. Alors, il existe $x \in T$ tel que $a \oplus x = b$ ou $a = b$ et il existe $y \in T$ tel que $b \oplus y = c$ ou $b = c$. Si $a = b$ ou $b = c$, la transitivité est triviale. Sinon, $a \oplus x \oplus y = b \oplus y = c$ d'où il est également possible de conclure $a \leq c$.

Montrons en outre que la relation \leq est compatible avec l'addition et la multiplication. Soit a et $b \in T$ tels que $a \leq b$. Si $a = b$, alors $a \oplus c = b \oplus c$,

$a \odot c = b \odot c$ et $c \odot a = c \odot b$, de sorte que $a \oplus c \leq b \oplus c$, $a \odot c \leq b \odot c$ et $c \odot a \leq c \odot b$. Sinon, il existe $d \in T$ tel que $a \oplus d = b$. Comme $a \oplus d \oplus c = b \oplus c$, alors $a \oplus c \leq b \oplus c$. De plus $(c \odot a) \oplus (c \odot d) = c \odot (a \oplus d) = c \odot b$ de sorte que $c \odot a \leq c \odot b$. De même, $a \odot c \leq b \odot c$.

□

4 Homomorphismes

Il est aussi intéressant de regarder les applications entre semi-anneaux. Plus particulièrement, considérons les semi-anneaux qui possèdent un zéro et un plus petit élément tels que décrits dans la définition 3.3. Les notations et la plupart des résultats proviennent des travaux de Allen [All69].

Définition 4.1. Soient deux semi-anneaux S et S' . Une application $f : S \longrightarrow S'$ est un *homomorphisme* si $f(a \oplus b) = f(a) \oplus' f(b)$ et $f(a \odot b) = f(a) \odot' f(b)$ pour tous $a, b \in S$.

Un homomorphisme $f : S \longrightarrow S'$ est un *isomorphisme* s'il existe un homomorphisme $g : S' \longrightarrow S$ tel que $g \circ f = \text{id}_S$ et $f \circ g = \text{id}_{S'}$. S et S' sont alors dits *isomorphes* et notés $S \cong S'$.

Naturellement, le *noyau* d'un homomorphisme est noté $\text{Ker } f = \{x \in S \mid f(x) = 0_{S'}\}$.

Remarque 4.2. Soit 0_S et $0_{S'}$ les zéros des semi-anneaux S et S' . Alors, $f(0_S) = 0_{S'}$. En effet, pour tout $x \in S$ nous savons que $f(x) = f(x \oplus 0_S) = f(x) \oplus' f(0_S)$, d'où $f(0_S) = 0_{S'}$.

Lemme 4.3. *Un homomorphisme de semi-anneaux $f : S \longrightarrow S'$ est un isomorphisme si et seulement si f est bijectif.*

Démonstration. Comme un isomorphisme admet une application inverse, alors f est bijectif.

Réciproquement, supposons que $f : S \longrightarrow S'$ est un homomorphisme bijectif. Alors, il existe une application inverse de f , notée g .

Nous avons alors

$$\begin{aligned} g(a \oplus' b) &= g(f(g(a)) \oplus' f(g(b))) \\ &= g(f(g(a) \oplus g(b))) \\ &= g(a) \oplus g(b). \end{aligned}$$

De même, $g(a \odot' b) = g(a) \odot g(b)$. Comme g est un homomorphisme, f est un isomorphisme. □

Il devient pertinent de chercher un équivalent au théorème d'isomorphisme pour les anneaux. Il faudra d'abord définir la notion d'idéal et l'adaptée aux semi-anneaux.

Définition 4.4. Soit S un semi-anneau et I un ensemble tel que $I \subseteq S$. Alors, I est un idéal de S si :

- a) pour tous $a, b \in I$, nous avons $a \oplus b \in I$.
- b) pour tous $a \in I$ et $x \in S$, nous avons $a \odot x \in I$ et $x \odot a \in I$.

Écrivons alors $I \triangleleft S$.

Exemple 4.5.

- a) Soit un semi-anneau commutatif S . Alors, $Sx = \{a \odot x \mid a \in S\}$ pour un $x \in S$. Nous prétendons que $Sx \triangleleft S$. En effet, soit $a, b \in Sx$. Alors, $a = a' \odot x$ et $b = b' \odot x$ avec $a', b' \in S$. Ainsi, $a \oplus b = a' \odot x \oplus b' \odot x = (a' \oplus b') \odot x \in Sx$. De plus, soit $y \in S$. Alors, $y \odot a = y \odot (a' \odot x) = (y \odot a') \odot x \in Sx$ et $a \odot y = (a' \odot x) \odot y = (a' \odot y) \odot x \in Sx$.
- b) Soit le semi-anneau $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. Posons $I = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Alors, I est un idéal de \mathbb{N} . En effet, soit $x, y \in I$ et $a \in \mathbb{N}$. Alors, $x + y \in I$, car $1 = 1 + 0 = 0 + 1$, mais $x \neq 1$ et $y \neq 1$. De plus, $a \cdot x \neq 1$, car $x \neq 1$, d'où le résultat. Toutefois, observons que $0 + I = I$ et $1 + I = \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$ et donc $(0 + I) \cap (1 + I) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} \neq \emptyset$.
- c) Soit $f : S \longrightarrow S'$ un homomorphisme. Montrons que $\text{Ker } f$ est un idéal de S . Soit $x, y \in \text{Ker } f$ et $a \in S$. Alors, $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y) = 0_{S'}$ et donc, $x \oplus y \in \text{Ker } f$. De plus, $f(a \odot x) = f(a) \odot f(x) = 0_{S'} = f(x) \odot f(a) = f(x \odot a)$ et ainsi, $a \odot x, x \odot a \in \text{Ker } f$.

Comme dans le cas des anneaux, il est possible de faire un lien entre semi-corps et idéaux, voir [AL09].

Théorème 4.6. Soit T un semi-anneau commutatif avec une identité multiplicative. Alors, T est un semi-corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et T .

Démonstration. Supposons que T est un semi-corps. Soit $I \triangleleft T$ tel que $I \neq \{0\}$. Prenons $x \in I$, $x \neq 0$. Alors, $x \in T$ est inversible. De ce fait, $x \odot x' = x' \odot x = e \in I$. Comme l'identité multiplicative est dans l'idéal, nous obtenons $I = T$.

Réciproquement, supposons que les seuls idéaux de T sont $\{0\}$ et T . Soit $x \in T$ tel que $x \neq 0$. Cherchons x' tel que $x \odot x' = e = x' \odot x$. Soit $Tx = \{t \odot x \mid t \in T\}$ l'idéal engendré par x . Comme $x \in Tx$, $Tx \neq \{0\}$ et ainsi, $Tx = T$ ce qui implique que $e \in Tx$. Il existe donc un $x' \in T$ tel que $x \odot x' = e = x' \odot x$. \square

Avec cette définition d'idéal, l'exemple 4.5 b) permet de constater que la congruence modulo un idéal n'est pas une équivalence puisque $\{x + I\}_{x \in S}$ n'est pas nécessairement une partition de S . Nous avons donc besoin d'une définition d'idéal plus restrictive.

Définition 4.7. Soit S un semi-anneau et I un ensemble tel que $I \triangleleft S$. I est un Q -idéal s'il existe un ensemble $Q \subseteq S$ tel que $\{q \oplus I\}_{q \in Q}$ est une partition de S .

Exemple 4.8. Soit le semi-anneau $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. Alors, $\langle m \rangle = \{n \cdot m \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un idéal de \mathbb{N} . En effet, soit $x, y \in \langle m \rangle$ et $a \in \mathbb{N}$. Alors, $x + y = x'm + y'm = (x' + y')m \in \langle m \rangle$ pour $x', y' \in \mathbb{N}$ et $ax = a(x'm) = (ax')m = (x'm)a = xa \in \langle m \rangle$. Si $m = 0$, alors $\langle m \rangle = \{0\}$ et posons $Q = \mathbb{N}$. Ainsi, $\{q + 0\} = \{q\}$ et c'est une partition de \mathbb{N} . Sinon, posons $Q = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Alors, $\{q_1 + n \cdot m\} \cap \{q_2 + n' \cdot m\} = \emptyset$ et il s'agit aussi d'une partition de \mathbb{N} .

Commençons par illustrer le lien entre le semi-anneau S et l'ensemble Q lorsqu'il existe un Q -idéal.

Lemme 4.9. Soit I un Q -idéal dans le semi-anneau S . Alors, si $x \in S$, il existe un unique $q \in Q$ tel que $x \oplus I \subseteq q \oplus I$.

Démonstration. Soit une partition $\{q \oplus I\}_{q \in Q}$, de sorte que pour tout $x \in S$, il existe un unique $q \in Q$ tel que $x \in q \oplus I$. Ainsi, il existe un $i_1 \in I$ tel que $x = q \oplus i_1$.

Ensuite, supposons que $y \in x \oplus I$. Alors, il existe un $i_2 \in I$ tel que $y = x \oplus i_2$. Mais alors $y = (q \oplus i_1) \oplus i_2 = q \oplus (i_1 \oplus i_2)$, ce qui implique que $y \in q \oplus I$. \square

Remarque 4.10. Il s'ensuit que $q_1 \oplus I = q_2 \oplus I$ si et seulement si $q_1 = q_2$.

Définition 4.11. Soit $\{q \oplus I\}_{q \in Q}$ une partition d'un semi-anneau S , I un idéal de S et $q_1, q_2 \in Q$. Notons q_3 et q_4 respectivement les uniques éléments de Q tels que $(q_1 \oplus q_2) \oplus I \subseteq q_3 \oplus I$ et $(q_1 \odot q_2) \oplus I \subseteq q_4 \oplus I$. Définissons alors les opérations $+$ et \cdot sur les éléments de la partition de la manière suivante :

$$\text{a) } (q_1 \oplus I) + (q_2 \oplus I) = q_3 \oplus I$$

$$\text{b) } (q_1 \oplus I) \cdot (q_2 \oplus I) = q_4 \oplus I.$$

Notation 4.12. Notons $\{q \oplus I\}_{q \in Q} = S/QI$ afin de simplifier l'écriture.

Théorème 4.13. Soit I un Q -idéal du semi-anneau S . Alors, $(S/QI, +, \cdot)$ est un semi-anneau ayant un zéro et un plus petit élément.

Démonstration. D'abord, vérifions la commutativité de l'addition. Soit $q_1, q_2 \in Q$. Nous savons que :

$$(q_1 \oplus I) + (q_2 \oplus I) = (q_3 \oplus I)$$

où q_3 est l'unique élément de Q tel que $(q_1 \oplus q_2) \oplus I \subseteq q_3 \oplus I$. Or, $(q_2 \oplus q_1) \oplus I \subseteq q_3 \oplus I$ et donc

$$(q_1 \oplus I) + (q_2 \oplus I) = (q_3 \oplus I) = (q_2 \oplus I) + (q_1 \oplus I).$$

Ensuite, vérifions l'associativité de l'addition et de la multiplication. Soit $q_1, q_2, q_3 \in Q$. Nous avons

$$((q_1 \oplus I) + (q_2 \oplus I)) + (q_3 \oplus I) = (q_4 \oplus I) + (q_3 \oplus I),$$

où q_4 est tel que $(q_1 \oplus q_2) \oplus I \subseteq q_4 \oplus I$. Comme il existe aussi q_5 tel que $(q_4 \oplus q_3) \oplus I \subseteq q_5 \oplus I$ et alors $(q_1 \oplus q_2 \oplus q_3) \oplus I \subseteq q_5 \oplus I$,

$$((q_1 \oplus I) + (q_2 \oplus I)) + (q_3 \oplus I) = q_5 \oplus I.$$

De plus,

$$(q_1 \oplus I) + ((q_2 \oplus I) + (q_3 \oplus I)) = (q_1 \oplus I) + (q_6 \oplus I),$$

où q_6 est tel que $(q_2 \oplus q_3) \oplus I \subseteq q_6 \oplus I$. Donc, il existe q_7 tel que $(q_1 \oplus q_6) \oplus I \subseteq q_7 \oplus I$ et alors $(q_1 \oplus q_2 \oplus q_3) \oplus I \subseteq q_7 \oplus I$. En vertu du lemme 4.9 et de la remarque 4.10, nous savons que $q_5 = q_7$ et ainsi,

$$((q_1 \oplus I) + (q_2 \oplus I)) + (q_3 \oplus I) = (q_1 \oplus I) + ((q_2 \oplus I) + (q_3 \oplus I)).$$

L'associativité de la multiplication est prouvée de manière similaire.

Il faut aussi vérifier la distributivité.

$$(q_1 \oplus I) \cdot ((q_2 \oplus I) + (q_3 \oplus I)) = (q_1 \oplus I) \cdot (q_4 \oplus I),$$

où q_4 est tel que $(q_2 \oplus q_3) \oplus I \subseteq q_4 \oplus I$. Comme il existe aussi q_5 tel que $(q_1 \odot q_4) \oplus I \subseteq q_5 \oplus I$ et $(q_1 \odot q_2 \oplus q_1 \odot q_3) \oplus I \subseteq q_5 \oplus I$,

$$(q_1 \oplus I) \cdot ((q_2 \oplus I) + (q_3 \oplus I)) = (q_5 \oplus I)$$

et ainsi,

$$(q_5 \oplus I) = ((q_1 \oplus I) \cdot (q_2 \oplus I)) + ((q_1 \oplus I) \cdot (q_3 \oplus I)),$$

d'où le résultat. Avec un raisonnement semblable, nous prouvons la distributivité à droite.

Il reste à prouver l'existence d'un zéro et d'un plus petit élément. Construisons la fonction ϕ définie comme suit. Pour $x \in S$ soit $q \in Q$ l'unique élément tel que $x \oplus I \subseteq q \oplus I$. Posons alors $\phi(x) = q \oplus I$. C'est un homomorphisme. Soit $0 \in S$ et $\phi(0) = q^* \oplus I$. Montrons que $q^* \oplus I$ est le zéro et le plus petit élément. Nous savons que $x \odot 0 = 0$ avec $\phi(x) = q \oplus I$. Donc

$$(q \oplus I) \cdot (q^* \oplus I) = \phi(x) \cdot \phi(0) = \phi(x \odot 0) = \phi(0) = q^* \oplus I.$$

De même, nous obtenons que $(q^* \oplus I) \cdot (q \oplus I) = q^* \oplus I$. De manière similaire, nous savons que $x \oplus 0 = x$, ce qui implique que

$$q \oplus I = \phi(x) = \phi(x \oplus 0) = \phi(x) + \phi(0) = (q \oplus I) + (q^* \oplus I),$$

d'où le résultat. □

Lemme 4.14. *Soit S un semi-anneau et $I \triangleleft S$. Si I est un Q -idéal et un Q' -idéal, alors $S/QI \cong S/Q'I$.*

Démonstration. Soit $q \in Q \subseteq S$ et $q' \in Q'$ l'unique élément tel que $q \oplus I \subseteq q' \oplus I$. Construisons la fonction

$$\begin{aligned} f : S/QI &\longrightarrow S/Q'I \\ q \oplus I &\longmapsto q' \oplus I \end{aligned}$$

Nous voulons prouver qu'il s'agit d'un isomorphisme. Tout d'abord, montrons que f est un homomorphisme. Soit $q_1, q_2 \in Q$. Alors, il existe un unique $q_3 \in Q$ tel que $(q_1 \oplus q_2) \oplus I \subseteq q_3 \oplus I$. Soit $q'_1, q'_2, q'_3 \in Q'$ tel que $f(q_1 \oplus I) = q'_1 \oplus I$, $f(q_2 \oplus I) = q'_2 \oplus I$ et $f(q_3 \oplus I) = q'_3 \oplus I$. Ainsi, nous avons $(q_1 \oplus q_2) \oplus I \subseteq q'_3 \oplus I$ et donc, $q'_1 \oplus q'_2 \oplus I \subseteq q'_3 \oplus I$, ce qui implique

$$\begin{aligned} f((q_1 \oplus I) + (q_2 \oplus I)) &= f(q_3 \oplus I) \\ &= q'_3 \oplus I \\ &= (q'_1 \oplus I) + (q'_2 \oplus I) \\ &= f(q_1 \oplus I) + f(q_2 \oplus I). \end{aligned}$$

Il en va de même pour la multiplication.

Il reste donc à montrer que f est bijective. Soit $q_1, q_2 \in Q$ et $q'_1, q'_2 \in Q'$ tels que $q'_1 \oplus I = f(q_1 \oplus I) = f(q_2 \oplus I) = q'_2 \oplus I$. Alors, $q'_1 = q'_2$ et en vertu de la remarque 4.10, nous savons que $q_1 = q_2$, donc f est injective.

Prouvons à présent que f est aussi surjective. Soit $q' \in Q'$. Comme $S/Q'I$ est une partition de S , il existe $x \in S$ tel que $x \in q' \oplus I$. Alors, il existe $i_1 \in I$ tel que $x \oplus i_1 = q'$, mais il existe aussi $q \in Q$ tel que $x \in q \oplus I$, ce qui implique qu'il existe $i_2 \in I$ tel que $x \oplus i_2 = q$. Il en découle que $x \oplus i_2 \oplus i_1 \oplus I = q \oplus I \subseteq q' \oplus I$. Par conséquent, f est un homomorphisme bijectif et donc un isomorphisme. \square

Lemme 4.15. *Soit S et S' deux semi-anneaux, I un Q -idéal dans S et un homomorphisme $f : S \longrightarrow S'$.*

- a) *Soit $p : S \longrightarrow S/QI : x \mapsto q \oplus I$ où q est l'unique élément tel que $x \oplus I \subseteq q \oplus I$. Alors, p est un homomorphisme appelé la projection canonique.*
- b) *Soit $j : \text{Im} f \longrightarrow S' : x \mapsto x$. Alors, cette application est un homomorphisme appelé l'inclusion.*

Démonstration.

- a) Soit $x, y \in S$ et $q, q_1, q_2 \in Q$ tels que $p(x \oplus y) = q \oplus I$, $p(x) = q_1 \oplus I$, $p(y) = q_2 \oplus I$. Alors, nous avons $(x \oplus y) \oplus I \subseteq q \oplus I$ et donc $p(x \oplus y) = q \oplus I = (q_1 \oplus I) + (q_2 \oplus I) = p(x) + p(y)$. De la même manière, avec $q \in Q$ tel que $p(x \odot y) = q \oplus I$, nous savons que $p(x \odot y) = p(x) \cdot p(y)$. Ainsi, la projection est un homomorphisme.

- b) Soit $x', y' \in \text{Im}f$. Alors, il existe $x, y \in S$ tels que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$. Ainsi, nous avons que $j(x' \oplus' y') = j(f(x) \oplus' f(y)) = j(f(x \oplus y)) = f(x \oplus y) = f(x) \oplus' f(y) = j(x') \oplus' j(y')$ et de la même manière $j(x' \odot' y') = j(x') \odot' j(y')$. Ainsi, l'inclusion est un homomorphisme.

□

Lemme 4.16. *Soit $\text{Im}f$ l'image d'un homomorphisme de semi-anneaux $f : S \longrightarrow S'$. Alors, $\text{Im}f$ est un semi-anneau pour les mêmes opérations que celles définies dans S' .*

Démonstration. Prouvons d'abord la commutativité de l'addition. Soit $f(x), f(y) \in \text{Im}f$. Alors, nous savons que $f(x) \oplus' f(y) = f(x \oplus y) = f(y \oplus x) = f(y) \oplus' f(x)$. De la même manière, nous obtenons l'associativité de l'addition et de la multiplication ainsi que la distributivité à gauche et à droite. Il y a aussi un zéro, car $f(x) \oplus' f(0) = f(x \oplus 0) = f(x)$ et un plus petit élément, car $f(x) \odot' f(0) = f(x \odot 0) = f(0)$. □

Définition 4.17. Soit $f : S \longrightarrow S'$ un homomorphisme de semi-anneaux. La fonction f est dite *maximale* si pour tout élément a de l'image de f , il existe un élément c_a de sa préimage $f^{-1}(a) = \{x \mid f(x) = a\}$ tel que $x \oplus \text{Ker}f \subseteq c_a \oplus \text{Ker}f$ pour tout $x \in f^{-1}(a)$.

Remarque 4.18. Dans les travaux de Allen [All69], la définition d'un homomorphisme maximal requiert la surjectivité de l'application. Nous avons généralisé les résultats qui suivent pour qu'ils s'appliquent à tous les homomorphismes de semi-anneaux. De plus, remarquons que l'élément c_a n'est pas nécessairement unique.

Exemple 4.19.

- a) Soit $S = (\mathbb{N}, \max, \min)$. Montrons qu'il s'agit d'un semi-anneau. D'abord, \max est commutatif et les deux opérations sont associatives, car pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$, nous avons $\max(a, \max(b, c)) = \max(a, b, c) = \max(\max(a, b), c)$ et $\min(a, \min(b, c)) = \min(a, b, c) = \min(\min(a, b), c)$. Ensuite, il est facile de vérifier que la distributivité est respectée en étudiant chacun des cas possibles : $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ et $c \leq b \leq a$. Enfin, c'est un semi-anneau avec un zéro et un plus petit élément. En effet $\min(a, 0) = 0 = \min(0, a)$ et $\max(a, 0) = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que c'est un semi-anneau bien ordonné, c'est-à-dire que toute partie non vide possède un plus petit élément.

De façon similaire, nous obtenons que $S' = (\{0, 1\}, \max, \min)$ est un semi-anneau. Soit l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ telle que

$$f = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{N}$. Prouvons que f est un homomorphisme. Soit $x, y \in \mathbb{N}$. Alors, $f(\max(x, y)) = \max(f(x), f(y))$ et $f(\min(x, y)) = \min(f(x), f(y))$.

Vérifions si f est maximal. Prenons $y \in f^{-1}(1)$, donc $f(y) = 1$ ce qui implique $y > 5$. Nous avons ainsi $\max_{k \in \text{Ker} f}(y, k) = y$ et alors, il n'existe pas de $c \in f^{-1}(1)$ tel que $\max_{k \in \text{Ker} f}(y, k) \subseteq \max_{k \in \text{Ker} f}(c, k)$ pour tout $y \in f^{-1}(1)$. Il en découle que f n'est pas maximal.

- b) Soit le semi-anneau $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ et $\langle m \rangle = \{n \cdot m \mid n \in \mathbb{N}\}$ un Q -idéal de \mathbb{N} . Soit $m > 0$ et $\mathbb{N}/\langle m \rangle = \{a + \langle m \rangle \mid a \in \mathbb{N}\}$ un semi-anneau en vertu du théorème 4.13. Nous savons aussi que $x \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique tel que $x = qm + r$ où $q, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < m$. Alors, posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}/\langle m \rangle \\ x &\longmapsto r + \langle m \rangle \end{aligned}$$

où r est tel que défini plus haut. Nous prétendons que c'est un homomorphisme maximal.

Commençons par montrer qu'il s'agit bien d'un homomorphisme. Pour l'addition, on nous avons que

$$f(x + y) = f((qm + r) + (q'm + r')) = f((q + q')m + (r + r'))$$

ce qui donne deux cas possibles. Si $r + r' < m$, alors $f(x + y) = r + r' + \langle m \rangle = f(x) + f(y)$. Sinon, nous avons que $m \leq r + r' < 2m$ et ainsi, il existe $0 \leq r'' < m$ tel que $r + r' = m + r''$. Alors, $f(x + y) = f((q + q' + 1)m + r'') = r'' + \langle m \rangle = f(x) + f(y)$. Pour la multiplication, il suffit de suivre un raisonnement similaire.

Il reste à montrer que f est maximal. Mais $\text{Im} f = \mathbb{N}/\langle m \rangle$, donc f est surjective et $\text{Ker} f = \langle m \rangle$. Soit un élément $a + \langle m \rangle \in \mathbb{N}/\langle m \rangle$ tel que $f(a) = a + \langle m \rangle$. Prenons un élément de la préimage de $a + \langle m \rangle$, disons y . Mais cela implique que $f(y) = f(qm + a) = a + \langle m \rangle$. Il en découle que

$$y + \text{Ker} f = qm + a + \langle m \rangle = a + \langle m \rangle = a + \text{Ker} f$$

et, par conséquent, $y + \text{Ker} f \subseteq a + \text{Ker} f$. Ainsi, f est maximal.

Lemme 4.20. *Soit $f : S \longrightarrow S'$ un homomorphisme maximal de semi-anneaux. Alors, $\text{Ker} f$ est un Q -idéal avec $Q = \{c_a\}_{a \in \text{Im} f}$*

Démonstration. Nous savons que $\text{Ker} f$ est un idéal de S . Il reste donc à montrer que $\{c_a \oplus \text{Ker} f\}_{c_a \in Q}$ donne une partition de S .

Supposons que $c_a, c_b \in Q$ distincts, c'est-à-dire que $a \neq b$. Si $(c_a \oplus \text{Ker} f) \cap (c_b \oplus \text{Ker} f) \neq \emptyset$, alors il existe $k, k' \in \text{Ker} f$ tel que $c_a \oplus k = c_b \oplus k'$.

Or, $a = f(c_a) \oplus f(k) = f(c_a \oplus k) = f(c_b \oplus k') = f(c_b) \oplus f(k') = b$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc, il s'agit bien une partition et $\text{Ker} f$ est un Q -idéal. \square

Lemme 4.21. *Soit $f : S \rightarrow S'$ un homomorphisme maximal de semi-anneaux et $Q = \{c_a\}_{a \in \text{Im}f}$. Si $c_a, c_b, c_d \in Q$, alors nous avons que :*

a) *Si $c_a \oplus c_b \oplus \text{Ker}f \subseteq c_d \oplus \text{Ker}f$, alors $a \oplus' b = d$.*

b) *Si $c_a \odot c_b \oplus \text{Ker}f \subseteq c_d \oplus \text{Ker}f$, alors $a \odot' b = d$.*

Démonstration. Soit $c_a \oplus c_b \oplus \text{Ker}f \subseteq c_d \oplus \text{Ker}f$. Alors, nous avons que $c_a \oplus c_b \in c_d \oplus \text{Ker}f$ et donc, il existe $k \in \text{Ker}f$ tel que $c_a \oplus c_b = c_d \oplus k$. Ainsi, $a \oplus' b = f(c_a) \oplus' f(c_b) = f(c_a \oplus c_b) = f(c_d \oplus k) = f(c_d) \oplus' f(k) = d$.

De même, nous obtenons que $a \odot' b = d$. \square

Théorème 4.22. *Soit $f : S \rightarrow S'$ un homomorphisme maximal de semi-anneaux, $p : S \rightarrow S/Q\text{Ker}f$ la projection canonique et $j : \text{Im}f \rightarrow S'$ l'inclusion. Alors, il existe un unique homomorphisme $f' : S/Q\text{Ker}f \rightarrow \text{Im}f$ tel que $f = j \circ f' \circ p$. En outre, f' est un isomorphisme.*

Démonstration. Pour l'unicité, nous supposons que f' existe telle que définie plus haut, ce qui donne $f'(c_a \oplus \text{Ker}f) = f'(p(c_a)) = j(f'(p(c_a))) = f(c_a) = a$. Il faut prouver que cette dernière formule définit f' sans ambiguïté. Soit $x \oplus \text{Ker}f = y \oplus \text{Ker}f$. Il existe alors un $k \in \text{Ker}f$ tel que $x = y \oplus k$ et $f(x) = f(y \oplus k) = f(y) \oplus' f(k) = f(y)$. Il est possible d'en déduire que $f'(x \oplus \text{Ker}f) = f(x) = f(y \oplus k) = f'(y \oplus k \oplus \text{Ker}f) = f'(y \oplus \text{Ker}f)$, d'où l'existence.

Il reste à montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme. Montrons d'abord que f' est bijective. Comme f est maximal, $f'(c_a \oplus \text{Ker}f) = f'(c_b \oplus \text{Ker}f)$ implique que $a = b$, d'où l'injectivité. De plus, soit $a \in \text{Im}f$. Alors, $f'(c_a \oplus \text{Ker}f) = a$ et $c_a \oplus \text{Ker}f \in S/Q\text{Ker}f$. Enfin, c_a existe en vertu de la maximalité de f . Donc, f' est surjective et par le fait même bijective. Il reste à montrer que f' est un homomorphisme. D'abord pour l'addition, $f'((c_a \oplus \text{Ker}f) + (c_b \oplus \text{Ker}f)) = f'(c_d \oplus \text{Ker}f) = d$ avec $c_a \oplus c_b \oplus \text{Ker}f \subseteq c_d \oplus \text{Ker}f$. En vertu du lemme précédent, nous savons que $d = a \oplus' b = f'(c_a \oplus \text{Ker}f) \oplus' f'(c_b \oplus \text{Ker}f)$. Il suffit de procéder de la même manière pour la multiplication. \square

Observons maintenant les quotients d'un semi-corps T .

Lemme 4.23. *Soit T un semi-corps. Alors, ses quotients sont, à isomorphisme près, $\{0\}$ et T .*

Démonstration. Selon le théorème 4.6, les seuls idéaux d'un semi-corps T sont $\{0\}$ et T . Soit $\{0\} \triangleleft T$. Alors, $\{0\}$ est un Q -idéal avec $Q = T$. Le quotient $T/T\{0\}$ est égal, par définition, à $\{t \oplus \{0\}\}_{t \in T} = \{\{t\}\}_{t \in T} \cong T$. Soit $T \triangleleft T$. Alors, $Q = \{0\}$ pour que T soit un Q -idéal et son quotient est de la forme $T/\{0\}T$. Mais alors, $T/\{0\}T = \{0 \oplus T\} = \{T\} \cong \{0\}$. \square

5 Algèbres de Boole et treillis

Tel que mentionné dans l'exemple 2.2, un semi-anneau peut également être une algèbre de Boole. Définissons donc cette structure selon [BML08] et intéressons-nous aux similitudes avec les semi-anneaux.

Définition 5.1. Une *algèbre de Boole* est un ensemble B muni de deux opérations binaires \vee et \wedge qui sont idempotentes, commutatives, associatives, absorbantes entre elles ($a \vee (a \wedge b) = a$ et $a \wedge (a \vee b) = a$) et mutuellement distributives. De plus, il existe O et $I \in B$ tels que $O \vee a = a$, $O \wedge a = O$, $I \vee a = I$ et $I \wedge a$. Enfin, l'ensemble possède une opération unaire $a \mapsto a'$ telle que $a \vee a' = I$ et $a \wedge a' = O$.

Déterminons les propriétés nécessaires aux semi-anneaux pour avoir une algèbre de Boole.

Théorème 5.2. *Soit un triplet (S, \oplus, \odot) . Alors, S est une algèbre de Boole si et seulement si (S, \oplus, \odot) et (S, \odot, \oplus) sont des semi-corps idempotents, absorbants, commutatifs, avec un plus petit élément qui est le zéro ainsi qu'un plus grand élément qui est l'identité multiplicative.*

Démonstration. Soit S une algèbre de Boole. En vertu de sa définition, l'opération \oplus est commutative et associative, alors que \odot est associative. De plus, nous savons que \odot se distribue sur \oplus . Par conséquent, (S, \oplus, \odot) est un semi-anneau. De manière analogue, il s'ensuit que (S, \odot, \oplus) est aussi un semi-anneau.

En vertu de la définition 5.1 et des propriétés des semi-anneaux dans la section 3, nous savons que (S, \oplus, \odot) est un semi-anneau idempotent, absorbant, commutatif, possédant un plus grand élément qui est l'identité multiplicative I de même qu'un plus petit élément qui est le zéro O . De plus, a' est l'inverse de a pour tout $a \in S$, donc S est un semi-corps. Il en va de même pour (S, \odot, \oplus) .

Réciproquement, soit (S, \oplus, \odot) et (S, \odot, \oplus) deux semi-corps idempotents, absorbants, commutatifs, avec un plus petit élément et zéro et un plus grand élément et identité multiplicative. Alors, les deux opérations sont idempotentes, commutatives, associatives, absorbantes entre elles et mutuellement distributives. De plus, il existe un plus petit élément qui est un zéro et un plus grand élément qui est une identité multiplicative et il existe un inverse, donc une opération unaire. Ainsi, nous avons vérifié tous les axiomes de la définition 5.1 et S est une algèbre de Boole. \square

Exemple 5.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Considérons $B = \{m \mid m|n\}$. Prenons comme opérations le plus grand commun diviseur (pgcd) et le plus petit commun multiple (ppcm). Nous prétendons qu'il s'agit d'une algèbre de Boole. Montrons que B vérifie bien tous les axiomes.

Par définition, le pgcd et le ppcm sont idempotents. Il est aussi clair que les deux opérations sont commutatives. Prouvons qu'elles sont également associatives, c'est-à-dire pour tous $a, b, c \in B$, nous avons ,

$$\text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b, c)) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c)$$

et

$$\text{ppcm}(a, \text{ppcm}(b, c)) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(a, b), c).$$

En effet, posons $e = \text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b, c))$ et $f = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c)$. Il s'ensuit que $e \mid a$ et $e \mid \text{pgcd}(b, c)$, ce qui implique que $e \mid a$, $e \mid b$ et $e \mid c$. Ainsi,

$e \mid \text{pgcd}(a, b)$ et $e \mid c$, d'où $e \mid f$. De la même façon, il est possible de montrer que $f \mid e$, donc $e = f$. L'associativité du ppcm se prouve de manière similaire.

L'absorption est vérifiée, car $\text{pgcd}(a, \text{ppcm}(a, b)) = \text{pgcd}(a, ka) = a$ pour un $k \in B$ tel que $\text{ppcm}(a, b) = ka$. Nous avons $\text{ppcm}(a, \text{pgcd}(a, b)) = a$ de la même manière.

Montrons que le pgcd est distribué sur le ppcm et vice versa. Nous savons que le pgcd est distributif sur lui-même. Ainsi, nous avons que

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(a, c) \text{pgcd}(b, c) \text{pgcd}(a, b) &= \text{pgcd}(aab, abb, aac, abc, acc, bbc, bcc) \\ &= \text{pgcd}(a, b, c) \text{pgcd}(ab, ac, bc) \\ &= \text{pgcd}(a, b, c) \frac{abc}{\text{ppcm}(a, b, c)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{abc}{\text{pgcd}(a, b) \text{ppcm}(a, b, c)} = \frac{\text{pgcd}(a, c) \text{pgcd}(b, c)}{\text{pgcd}(a, b, c)}.$$

Ainsi,

$$\frac{\text{ppcm}(a, b)c}{\text{ppcm}(\text{ppcm}(a, b), c)} = \frac{\text{pgcd}(a, c) \text{pgcd}(b, c)}{\text{pgcd}(\text{pgcd}(a, c), \text{pgcd}(b, c))},$$

ce qui donne

$$\text{pgcd}(\text{ppcm}(a, b), c) = \text{ppcm}(\text{pgcd}(a, c), \text{pgcd}(b, c)).$$

De même, le ppcm se distribue sur le pgcd.

Il reste à trouver O et I de même que l'opération unaire. Remarquons que pour tout $a \in B$, nous avons que $\text{pgcd}(a, n) = a$ et $\text{ppcm}(a, n) = n$, donc $I = n$. Aussi, $\text{pgcd}(a, 1) = 1$ et $\text{ppcm}(a, 1) = a$ d'où $O = 1$. Enfin, posons a' tel que $aa' = n$. Alors, $\text{pgcd}(a, a') = n$ et $\text{ppcm}(a, a') = 1$.

Étudions à présent une structure semblable aux algèbres de Boole, mais possédant moins d'axiomes de définition. Plus précisément, cette structure ne possède pas d'éléments O et I , ni d'opération unaire tels que décrits à la définition 5.1 et ses opérations binaires ne sont pas nécessairement mutuellement distributives.

Définition 5.4. Un *treillis* est un ensemble L possédant deux opérations \vee et \wedge qui sont idempotentes, commutatives, associatives et absorbantes. Si de plus les deux opérations sont mutuellement distributives, L est appelé un *treillis distributif*.

Exemple 5.5. Soit G un groupe quelconque et Σ l'ensemble de tous les sous-groupes de G . Posons pour tous $H, K \in \Sigma$ les opérations $H \wedge K = H \cap K$ et $H \vee K = \langle H, K \rangle$ où $\langle H, K \rangle$ est le plus petit sous-groupe contenant H et K . Montrons qu'il s'agit d'un treillis.

Les opérations \vee et \wedge sont trivialement idempotentes et commutatives. Il reste à montrer qu'elles sont associatives et absorbantes. Or, $\wedge = \cap$ est associative et pour tous $H, K, M \in \Sigma$, nous savons que $\langle H, \langle K, M \rangle \rangle = \langle H, K, M \rangle =$

$\langle \langle H, K \rangle, M \rangle$. En outre, nous trouvons que $H \cap \langle H, K \rangle = H = \langle H, H \cap K \rangle$, et ainsi, Σ est un treillis. Toutefois, il n'est généralement pas distributif.

Par exemple, soit $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Alors, Σ contient les sous-groupes $(1, 1)\mathbb{Z}$, $(0, 1)\mathbb{Z}$, $(1, 0)\mathbb{Z}$ et $(0, 0)\mathbb{Z}$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} (1, 1)\mathbb{Z} \cap \langle (0, 1)\mathbb{Z}, (1, 0)\mathbb{Z} \rangle &= (1, 1)\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ &= (1, 1)\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Par contre, nous savons que

$$\begin{aligned} \langle (1, 1)\mathbb{Z} \cap (0, 1)\mathbb{Z}, (1, 1)\mathbb{Z} \cap (1, 0)\mathbb{Z} \rangle &= \langle (0, 0)\mathbb{Z}, (0, 0)\mathbb{Z} \rangle \\ &= (0, 0)\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Puisqu'il n'y a pas égalité, la distributivité n'est pas respectée.

Comme pour les algèbres de Boole, cherchons des conditions nécessaires et suffisantes sur un semi-anneau pour qu'il soit aussi un treillis distributif.

Théorème 5.6. *Soit un triplet (S, \oplus, \odot) . Alors, S est un treillis distributif si et seulement si (S, \oplus, \odot) et (S, \odot, \oplus) sont tous deux des semi-anneaux idempotents, commutatifs et absorbants.*

Démonstration. Soit S un treillis distributif avec les opérations \oplus et \odot . Comme nous savons que \oplus est commutative et associative, que \odot est associative et que les deux opérations sont mutuellement distributives, nous en déduisons que (S, \oplus, \odot) est un semi-anneau.

En vertu de la définition 5.4 et des propriétés des semi-anneaux dans la section 3, S est un semi-anneau idempotent, commutatif et absorbant. De plus, le triplet (S, \odot, \oplus) est aussi un semi-anneau idempotent, commutatif et absorbant.

Réciproquement, soit (S, \oplus, \odot) et (S, \odot, \oplus) deux semi-anneaux idempotents, commutatifs et absorbants. Alors, les deux opérations sont idempotentes, commutatives, associatives, absorbantes et mutuellement distributives. Ainsi, tous les axiomes de la définition 5.4 sont vérifiés, donc S est un treillis distributif. \square

Exemple 5.7. Considérons le semi-anneau (\mathbb{N}, \max, \min) . Prouvons qu'il s'agit aussi d'un treillis. Il est clair que \min et \max sont idempotentes, commutatives et associatives. Il reste donc à montrer que ces opérations sont aussi absorbantes.

Or, $\max(a, \min(a, b)) = a$ et $\min(a, \max(a, b)) = a$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, donc l'absorption est vérifiée. Par conséquent (\mathbb{N}, \max, \min) est un treillis.

Il est aussi possible de montrer que c'est un treillis distributif, tel que dans l'exemple 4.19.

Références

- [AD13] Ibrahim ASSEM et Grégoire DUPONT : Friezes over semirings and tropicalizations. 2013.
- [AL09] Ibrahim ASSEM et Pierre Yves LEDUC : *Cours d'algèbre : groupes, anneaux, modules et corps*. Presses inter Polytechnique, 2009.
- [All69] Paul J. ALLEN : A fundamental theorem of homomorphisms for semirings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 21(2):412–416, 1969.
- [BG06] Stefano BISTARELLI et Fabio GADDUCCI : Enhancing constraints manipulation in semiring-based formalisms. *In Proceedings of the 2006 Conference on ECAI 2006 : 17th European Conference on Artificial Intelligence August 29 – September 1, 2006, Riva Del Garda, Italy*, pages 63–67. IOS Press, 2006.
- [BML08] Garrett BIRKHOFF et Saunders MAC LANE : *A Survey of Modern Algebra*. A K Peters, 4e édition, 2008.
- [Ded96] Richard DEDEKIND : *Theory of algebraic integers*. Cambridge University Press, New York, 1996.
- [FJZ08] Feng FENG, Young B. JUN et Xianzhong ZHAO : Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10):2621–2628, 2008.
- [KK10] Vítězslav KALA et Miroslav KORBELÁŘ : Congruence-simple subsemirings of \mathbb{Q} . *Semigroup Forum*, 81(2):286–296, 2010.
- [KS85] Werner KUICH et Arto SALOMAA : *Semirings, automata and languages*, volume 5 de *Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag New York, Inc., 1985.
- [RV04] Sergiu RUDEANU et Dragoş VAIDA : Semirings in operations research and computer science : More algebra. *Fundam. Inf.*, 61(1):61–85, janvier 2004.
- [Van39] Harry Schultz VANDIVER : On some simple types of semi-rings. *American Mathematical Monthly*, 46:22–26, 1939.
- [VC09] E. M. VECHTOMOV et A. V. CHERANEVA : Semifields and their properties. *Journal of Mathematical Sciences*, 163(6):625–661, 2009.

VÉRONIQUE BAZIER-MATTE
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
 Courriel: Veronique.Bazier-Matte@USherbrooke.ca

MÉLISSA BARBE MARCOUX
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
 Courriel: Melissa.Barbe-Marcoux@USherbrooke.ca

Les qualifications des contraintes en optimisation à contraintes non linéaires

Luc Marchand

RÉSUMÉ Cet article consiste en une vulgarisation du concept de qualification des contraintes du premier ordre dans un programme d'optimisation non linéaire. Des exemples de problèmes explicitant les différences entre plusieurs qualifications sont énoncés, permettant de mieux visualiser ce qu'impliquent ces qualifications. Les relations entre trois qualifications sont approfondies, c'est-à-dire l'indépendance linéaire (LICQ), la qualification de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) et la condition du rang constant (CRCQ). D'autres qualifications de nature plus analytique sont ensuite présentées.

1 Introduction

1.1 Mise en place du problème d'optimisation

Soit le programme non linéaire d'optimisation :

$$\begin{cases} \min & z = f(x) \\ \text{s.à.} & g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 & j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (\text{NLP})$$

où $f(x)$, $g_i(x)$ et $h_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables. La notation NLP est un acronyme pour *Non Linear Program*. Nous nous limitons à trouver un minimum local x^* du programme (NLP). Le point de départ de l'étude de tels problèmes est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité, c'est-à-dire se poser la question : «Que peut-on déduire du fait que x^* est un minimum local ? ».

Pour poursuivre, nous introduisons la fonction

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$. Cette fonction est appelée le lagrangien associé au problème (NLP). Les scalaires λ_i et μ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Remerciements particuliers au professeur Jean-Pierre Dussault et au comité de révision pour leurs conseils pour la rédaction de ce document.

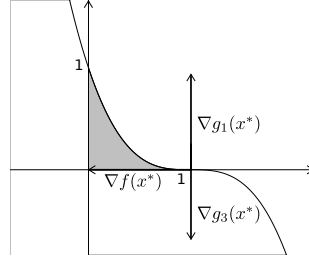


FIGURE 1 – Échec des qualifications des contraintes. Le point optimal étant situé en $(1, 0)^t$, on remarque que les gradients des contraintes génèrent l'axe vertical. Notre fonction ayant son gradient vers la partie négative de l'axe horizontal, on remarque que le résultat de KKT n'est pas vérifié.

En optimisation non linéaire avec contraintes, les conditions nécessaires de Karush-Kuhn-Tucker (conditions de KKT) sont les plus utilisées. Celles-ci stipulent qu'en un point stationnaire du Lagrangien \bar{x} , il existe des vecteurs $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu) &= \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_i &\geq 0, \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

Nous noterons par I l'ensemble des indices des contraintes $g_i(x)$. Donc la cardinalité de I est m . Nous noterons aussi par I^* l'ensemble des indices de I tels que $g_i(\bar{x}) = 0$. Les contraintes dont l'indice est dans I^* seront appelées contraintes actives au point \bar{x} et seuls leurs multiplicateurs seront éventuellement non-nuls.

Intuitivement, nos conditions nécessaires (1) signifient que le gradient de la fonction objectif peut être reconstruit par une combinaison linéaire des gradients des contraintes actives.

On désire que les points optimaux de $f(x)$ soient des points stationnaires du lagrangien. L'exemple suivant nous montrera qu'il faut une hypothèse supplémentaire afin que le résultat soit vérifié en un optimum local.

1.2 Exemple de non existence de multiplicateurs

Exemple 1.1. Soit le programme non linéaire (voir Figure 1) :

$$\begin{cases} \min & z = -x_1 \\ \text{s.à.} & g_1(x) = (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0 \\ & g_2(x) = -x_1 \leq 0 \\ & g_3(x) = -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Le point optimal est $x^* = (1, 0)^t$. En x^* , on remarque que les contraintes $g_1(x)$ et $g_3(x)$ sont satisfaites avec égalité. On en déduira donc que $I^* = \{1, 3\}$ alors que $I = \{1, 2, 3\}$ puisqu'il y a trois contraintes d'inégalité. Les multiplicateurs

λ_i pouvant être non nuls sont donc λ_1 et λ_3 . Les conditions (1) s'écrivent donc (après avoir géré les équations $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$ et ainsi, retiré $g_2(x)$ puisque $\lambda_2 = 0$) :

$$\begin{aligned}\nabla\mathcal{L}(\bar{x},\lambda,\mu) &= \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3(\bar{x}_1 - 1)^2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

et en x^* nous avons

$$\nabla\mathcal{L}(x^*,\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque qu'il n'existe pas de solution λ^* satisfaisant cette équation et, malgré cela, x^* est bel et bien un minimum local, même global.

Remarque 1.2. Dans le cas linéaire, on ne peut trouver d'exemple comme ci-dessus. En fait, l'existence des multiplicateurs sous contraintes linéaires en un minimum local ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire.

Ainsi, on doit exiger une hypothèse supplémentaire en un optimum x^* pour que celui-ci soit un point stationnaire du lagrangien (1). Cette hypothèse est qu'une qualification des contraintes soit respectée en \bar{x} . Mais qu'est-ce qu'une qualification des contraintes ?

2 Qualifications des contraintes d'ordre 1

Cette section constitue le corps principal de l'article. Nous y présentons la définition d'une qualification des contraintes (que j'acronymerai QC) au sens large, suivi des définitions de quelques QC. Plusieurs exemples seront aussi énoncés ici.

J'indique ici que les exemples qui permettront d'illustrer les différentes conditions présentées sont principalement composés de contraintes d'inégalités. Ceci est fait ainsi afin qu'il soit plus aisé de voir les subtilités entre les qualifications et réduire autant que possible la dimension des problèmes pour les illustrer plus facilement.

2.1 Définition et arborescence

L'exemple 1.1 montre que, même en un minimum local x^* , il n'existe pas nécessairement de multiplicateurs de Lagrange $\lambda^* \geq 0$ et μ^* libre tels que $\nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla g(x^*) + \mu^* \nabla h(x^*) = 0$. Une qualification des contraintes est simplement une hypothèse suffisante à l'existence de ces multiplicateurs en x^* pour que l'équation (1) soit satisfaite. Intuitivement, on peut voir une QC comme une hypothèse nous certifiant que la linéarisation des contraintes $\nabla g(x)$ et $\nabla h(x)$ agit localement de manière similaire aux contraintes $g(x)$ et $h(x)$.

Remarque 2.1. La linéarisation d'une fonction $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en x_0 consiste en l'hyperplan de dimension n passant par x_0 et ayant les mêmes dérivées directionnelles que la fonction $g(x)$ au point x_0 . Formellement, la linéarisation $l_{x_0}(x)$ en x_0 d'une fonction $g(x)$ est donnée par $l_{x_0}(x) = g(x_0) + \nabla g(x_0)(x - x_0)$. Cette fonction évaluée en un point \bar{x} suffisamment près de x_0 devrait donner une bonne approximation de $g(\bar{x})$. Aussi, la linéarisation de $g(x)$ en x_0 est l'hyperplan tangent à la fonction $g(x)$ en x_0 . Les propriétés de cette linéarisation dépendent grandement du vecteur $\nabla g(x_0)$. Bien que ce soit un abus de notation, nous appelons $\nabla g(x_0)$ la linéarisation de $g(x)$ en x_0 pour simplifier et alléger le discours.

En revenant à l'exemple 1.1, on remarque que la linéarisation des contraintes actives

$$\nabla g_{I^*}(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nous laisse croire que l'axe des x_1 reste réalisable en x^* , donc que l'on pourrait se déplacer autant vers la gauche que vers la droite à partir de $(1, 0)^t$ en restant réalisable. Toutefois, le vrai domaine réalisable de ce problème se situe entièrement à gauche de $(1, 0)^t$.

Il existe évidemment plusieurs qualifications différentes pour lesquelles les multiplicateurs de Lagrange ont certaines propriétés. Dans ce qui suit, on définira quatre de ces qualifications et leurs relations entre elles. La plupart des qualifications des contraintes sont notées par un acronyme tiré de l'anglais. Afin de familiariser les lecteurs avec la terminologie utilisée dans le domaine, j'utiliserai aussi ces acronymes anglais en expliquant leur provenance.

2.2 LICQ

Définition 2.2. La qualification des contraintes d'indépendance linéaire LICQ (*Linear Independance Constraints Qualification*) est satisfaite en un point x^* lorsque la matrice

$$\begin{pmatrix} \nabla h(x^*) \\ \nabla g_{I^*}(x^*) \end{pmatrix}$$

est de plein rang ligne, c'est-à-dire que le rang de cette matrice égale le nombre de lignes de la matrice.

Le théorème suivant nous montre que LICQ est bel et bien une QC.

Théorème 2.3. [FM90] *Soit x^* un minimum local de (NLP). Si LICQ est satisfait en x^* , alors il existe un vecteur $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tel que $\nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla g(x^*) + \mu^* \nabla h(x^*) = 0$, $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ et $\lambda^* \geq 0$. De plus, ces vecteurs sont uniques. \square*

En pratique, certaines méthodes de recherche de solutions de problèmes de la forme (NLP) convergent plus rapidement lorsque x^* est un point satisfaisant LICQ. C'est pourquoi il s'agit d'une des qualifications des contraintes les plus

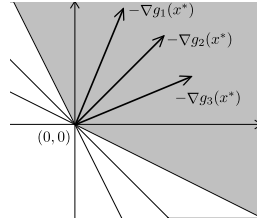


FIGURE 2 – Échec de LICQ. Il est évident, au point optimal $(0,0)^t$, que les gradients des contraintes actives ne peuvent pas être linéairement indépendants, puisque le nombre de contraintes actives en ce point est plus grand que la dimension du problème.

utilisées et connues. On remarque toutefois que LICQ est une qualification très forte, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.4. Soit le programme d'optimisation à contraintes linéaires (voir Figure 2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{s.à.} \quad g_1(x) = -0,5x_1 - x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = -x_1 - x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_3(x) = -2x_1 - x_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

La solution de ce problème est $x^* = (0,0)^t$. Or, en x^* , trois contraintes sont actives dans un espace de dimension 2, ce qui implique que la matrice

$$\nabla g_{I^*}(x^*) = \begin{pmatrix} -0,5 & -1 \\ -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ne peut être de plein rang ligne, ainsi LICQ n'est pas satisfaite.

On remarque aussi qu'il existe plusieurs vecteurs de multiplicateurs qui satisfont aux conditions (1). En particulier, puisque $\nabla f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient le système

$$\begin{aligned} 2 - 0,5\lambda_1 - 1\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ 2 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

qui admet les solutions $0 \leq \lambda_1 \leq \frac{4}{3}$, $\lambda_2 = 2 - \frac{3\lambda_1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{2}$.

Nous venons de voir que LICQ peut échouer même dans un programme sous contraintes linéaires qui, comme cité à la remarque 1.2, ne nécessite pas de QC. En effet, dans le problème précédent, puisqu'il y a plus d'un multiplicateur λ^* vérifiant les conditions d'optimalité de KKT, on pouvait s'attendre à ce que LICQ échoue.

2.3 MFCQ

Définition 2.5. La qualification des contraintes de Mangasarian-Fromovitz MFCQ est satisfaite en un point x^* lorsque la matrice $\nabla h(x^*)$ est de plein rang ligne et qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla g_{I^*}(x^*)v < 0$ et $\nabla h(x^*)v = 0$.

Cette qualification signifie simplement qu'il existe un vecteur qui entre dans l'intérieur du domaine réalisable sans rester sur la frontière des contraintes d'inégalité actives tout en restant sur les contraintes d'égalités.

Cette QC est aussi très connue, ce qui est expliqué par le théorème suivant.

Théorème 2.6. [FM90] Soit x^* un minimum local de la fonction $f(x)$ du problème (NLP). On a que x^* satisfait MFCQ si et seulement si l'ensemble Λ^* des vecteurs satisfaisant $\lambda^* \in \mathbb{R}^m, \mu^* \in \mathbb{R}^p$ tels que $\lambda^* \geq 0, \nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla g(x^*) + \mu^* \nabla h(x^*) = 0$ et $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ est non vide et borné. \square

Puisque plusieurs algorithmes d'optimisation non linéaire utilisent les multiplicateurs de Lagrange comme outil de recherche de solutions, le fait que l'ensemble des multiplicateurs soit borné sous MFCQ est d'une grande utilité. De plus, tout comme LICQ, cette QC est plutôt facile à vérifier. La suffisance de la condition du théorème précédent est aussi remarquable.

Corollaire 2.7. LICQ implique MFCQ.

Démonstration. Allons-y par la contraposée. On suppose MFCQ non satisfaite. Donc l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange est soit vide, soit non borné. Dans ces deux cas, l'ensemble des multiplicateurs n'est pas un singleton, et LICQ ne peut être satisfaite. \square

Remarque 2.8. L'exemple 2.4 satisfait MFCQ sans satisfaire LICQ. Les multiplicateurs de ce problème respectent $0,5\lambda_1 = \lambda_3, 2 - 1,5\lambda_1 = \lambda_2$. La condition $\lambda_i \geq 0$ nécessite donc $\lambda_1 \in [0, \frac{4}{3}]$. On remarque ainsi que l'ensemble

$$\Lambda^* = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid 0 \leq \lambda_1 \leq \frac{4}{3}, \lambda_2 = 2 - \frac{3\lambda_1}{2}, \lambda_3 = \frac{\lambda_1}{2} \right\}$$

des multiplicateurs de Lagrange possibles dans les équations (1) est de cardinalité infinie et est borné.

Une condition équivalente à MFCQ est donnée par l'énoncé suivant :

Proposition 2.9. MFCQ est satisfaite en x^* si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \nabla g(x^*) + \mu \nabla h(x^*) = 0 \\ \lambda g(x^*) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

\square

La démonstration de cette proposition utilise le théorème de dualité faible de programmation linéaire. Il s'agit d'une manière intéressante de démontrer des résultats à partir de théorèmes d'alternative (dont fait partie le théorème de dualité faible). La preuve est donc incluse à l'annexe A de ce document.

L'exemple suivant montre une situation telle que, pour toute fonction objectif deux fois continuellement différentiable admettant $(0, 0)^t$ comme minimum, il existe des multiplicateurs sans que MFCQ soit satisfaite. Il est donc possible d'affaiblir davantage MFCQ, toutefois nous perdrons le fait que l'ensemble des multiplicateurs soit borné.

Exemple 2.10. Soit le programme d'optimisation à contraintes non linéaires (voir Figure 3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \\ \text{s.à.} \quad g_1(x) = x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = -x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_3(x) = -x_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

Le domaine réalisable de ce programme est la branche $x \geq 0$ de la parabole. La solution de ce programme de minimisation est située au point $x^* = (0, 0)^t$. On remarque ici que MFCQ n'est pas satisfaite puisqu'il n'y a pas d'intérieur strict des contraintes.

Si l'on calcule le lagrangien de ce problème en x^* , nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

On observe donc que $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_3 = 2$ satisfont ces équations pour toute valeur de $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \geq 0$. Il y a donc un ensemble non borné de multiplicateurs possibles puisque les gradients des contraintes, $\nabla g_1(x)$ et $\nabla g_2(x)$, sont linéairement dépendants et de directions opposées pour tout point réalisable.

MFCQ réagit très mal aux contraintes d'égalité qui se dupliquent en deux contraintes d'inégalité. C'est le cas de l'exemple précédent avec les contraintes $g_1(x)$ et $g_2(x)$. En effet, si l'on définit $h_1(x) = x_1^2 - x_2 = 0$, l'ensemble réalisable reste le même en prenant les contraintes $h_1(x)$ et $g_3(x)$ et, avec une telle définition des contraintes, MFCQ est satisfaite en x^* .

2.4 CRCQ

Définition 2.11. La qualification des contraintes du rang constant CRCQ (*Constant Rank Constraints Qualification*) est satisfaite en un point x^* lorsqu'il existe un voisinage $X \subset E$ autour de x^* tel que pour tout sous-ensemble $K \subset I^*$ et $K' \subset \{1, \dots, p\}$, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \nabla h_j(\bar{x}) \\ \nabla g_i(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (i \in K, j \in K')$$

est constant pour tout $\bar{x} \in X$.

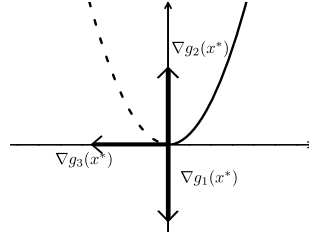


FIGURE 3 – Échec de MFCQ. Le domaine réalisable est la branche pleine de la parabole. La problématique vient du fait qu’il n’existe pas d’intérieur du domaine réalisable régi par les inégalités. Une forme alternative des contraintes (si l’on considère $g_1(x)$ et $g_2(x)$ comme une seule contrainte d’égalité) résout cette problématique.

Il s’agit bel et bien d’une qualification des contraintes (donc assurant l’existence des multiplicateurs de Lagrange). Toutefois, elle a été développée beaucoup plus tard que les autres qualifications présentées dans cet article. Cette qualification a été amenée principalement par Spingarn [Spi83] et Janin [Jan84]. Nous avons évidemment l’implication suivante :

Proposition 2.12. *LICQ implique CRCQ.*

Démonstration. LICQ satisfaite signifie que la matrice $\nabla g_i(x^*), i \in I^*$ est de plein rang ligne. Donc aucune ligne de la matrice n’est linéairement dépendante des autres. Puisque les fonctions $g_i(x)$ sont deux fois continuellement différentiable, alors $\nabla g_i(x)$ sont continues, donc il existe un voisinage X de x^* tel que la matrice $\nabla g_i(\bar{x}), \bar{x} \in X$ est aussi de plein rang ligne, et on a CRCQ. □

Remarque 2.13. Le fait que les contraintes $g_i(x), i \in I^*$ soient linéaires est suffisant à ce que CRCQ soit satisfaite en x^* puisque la matrice composée des lignes $\nabla g_i(x), i \in I^*$ est constante.

Les relations entre CRCQ et MFCQ sont plus subtiles. D’abord, remarquons que CRCQ est satisfaite pour l’exemple 2.10, donc CRCQ n’implique visiblement pas MFCQ. En effet, pour tout point de \mathbb{R}^2 (donc en particulier pour un voisinage de x^*), les gradients $\nabla g_1(x)$ et $\nabla g_2(x)$ sont linéairement dépendants (matrice de rang 1). De plus, les gradients $\nabla g_1(x)$ et $\nabla g_3(x)$ (ou $\nabla g_2(x)$ et $\nabla g_3(x)$) sont linéairement indépendants (de rang 2). Donc pour tout sous-ensemble des contraintes actives, la matrice des gradients des dites contraintes est de rang constant dans \mathbb{R}^2 .

L’exemple suivant montre que MFCQ n’implique pas CRCQ non plus.

Exemple 2.14. Soit le programme d’optimisation à contraintes non linéaires (voir Figure 4) :

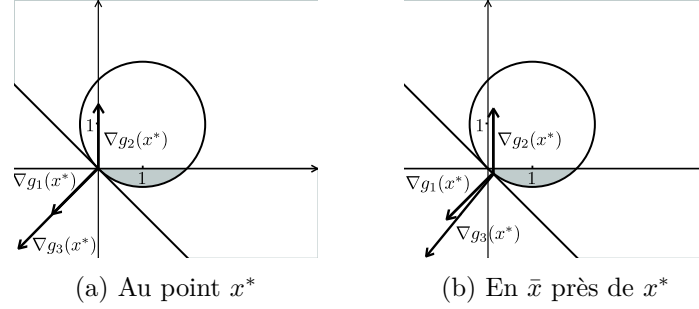


FIGURE 4 – Échec de CRCQ. Le point optimal x^* est en $(0, 0)^t$. On remarque que le long de la droite $x_2 = x_1$, les gradients des contraintes 1 et 3 sont linéairement dépendants (Figure 4a), mais pas ailleurs (Figure 4b). Puisque $x_2 = x_1$ passe par x^* , on a qu'il n'existe pas de voisinage autour de x^* de rang constant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = (x_1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.à.} \quad g_1(x) = -x_1 - x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_3(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble réalisable est borné par l'arc du cercle défini par $g_3(x) = 0$ et sous l'axe des x_1 . Le minimum local de ce problème est situé en $x^* = (0, 0)^t$ où les trois contraintes sont actives. En ce point, le vecteur $v = (1, -\frac{1}{4})^t$ nous amène dans l'intérieur du domaine réalisable, donc MFCQ est satisfaite. En effet, on voit que

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(x^*) \\ \nabla g_2(x^*) \\ \nabla g_3(x^*) \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

et ainsi $\nabla g_i(x^*)v < 0, \forall i \in I^*$, d'où MFCQ satisfaite.

Toutefois, si l'on prend l'ensemble d'indices $K = \{1, 3\}$, alors la matrice des $\nabla g_i(x^*)$ pour $i \in K$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2x_1 - 2 & 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

n'admet pas de voisinage de rang constant autour de x^* (la matrice est de rang 1 sur la droite $x_1 = x_2$ et de rang 2 ailleurs). Ainsi, CRCQ n'est pas satisfaite en x^* .

Remarque 2.15. Lu [Lu11] a récemment prouvé que, dans un problème non paramétrique (tels que ceux présentés plus haut), CRCQ implique MFCQ après modification de la forme des contraintes. On peut voir cela dans l'exemple 2.10, si l'on redéfinit $g_1(x)$ et $g_2(x)$ par une seule contrainte d'égalité $h_1(x)$. Les modifications apportées ne doivent évidemment pas modifier le domaine réalisable.

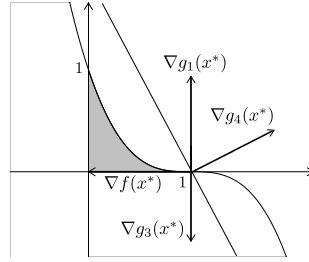


FIGURE 5 – Échec de MFCQ et CRCQ. MFCQ échoue car le seul vecteur réalisable est dans la direction $(-1, 0)^t$ qui n'est pas strictement réalisable ($g_3(x)$ reste satisfaite avec égalité le long de ce vecteur). De plus, CRCQ n'est pas satisfaite puisque pour les contraintes $g_1(x)$ et $g_3(x)$, il n'existe pas de voisinage de rang constant en x^* .

L'exemple suivant venant de [CW05] nous servira à déduire une autre qualification des contraintes historiquement importante.

Exemple 2.16. Soit le programme d'optimisation non linéaire (voir Figure 5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = -x_1 \\ \text{s.à.} \quad g_1(x) = (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_2(x) = -x_1 \leq 0 \\ \quad \quad g_3(x) = -x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_4(x) = 2x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \end{array} \right.$$

Il s'agit de l'exemple 1.1 auquel on a ajouté une contrainte active en $x^* = (1, 0)^t$. On remarque que MFCQ n'est pas satisfaite (les seules directions réalisables sont le long de l'axe des x_1 , pas à l'intérieur strict du domaine réalisable) et CRCQ non plus (l'ensemble d'indices $K = \{1, 3\}$ n'est pas de rang constant dans tout voisinage de x^*). On remarque toutefois qu'il existera des multiplicateurs de Lagrange (λ^*, μ^*) . En effet, on trouve facilement que $\nabla f(x^*) = (-1, 0)$ et que $\nabla g_1(x^*) = (0, 1)$, $\nabla g_3(x^*) = (0, -1)$ et $\nabla g_4(x^*) = (2, 1)$. En prenant $\lambda_4 = 1/2$ et $\lambda_1 - \lambda_3 = -1/2$, on obtient les équations de KKT satisfaites, justifiant ainsi qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange pour ce problème.

Remarque 2.17. Cet exemple nous permet d'observer quelque chose de remarquable en soi. L'ajout de la contrainte $g_4(x)$ ne modifie d'aucune manière le domaine réalisable. On pourrait même affirmer qu'elle semble inutile au problème. Toutefois, son ajout nous permet de travailler sur les multiplicateurs de Lagrange dans la recherche du point optimal. On doit toutefois observer que son ajout ne nous permet pas nécessairement d'avoir une qualification forte telle que LICQ. En regardant les choses sous un angle différent, on peut aussi en déduire que les qualifications des contraintes ne sont pas des conditions sur la structure du domaine réalisable, mais vraiment des conditions sur la structure des contraintes. En fait, considérant l'ensemble généré par les gradients des contraintes actives, on aura qu'il existera des multiplicateurs pour toute fonction admettant x^* comme minimum local.

L'exemple précédent nous motive à présenter succinctement d'autres qualifications des contraintes. Afin de faire une présentation complète, on ne peut passer ces qualifications sous silence. Nous ne présentons toutefois pas les détails de ces qualifications puisque celles-ci débordent de l'objectif de l'article : présenter des qualifications vérifiables par des méthodes issues de l'algèbre linéaire.

2.5 Qualifications des contraintes de nature analytique

Les qualifications des contraintes vues précédemment s'expriment à l'aide du langage de l'algèbre linéaire : l'indépendance linéaire de vecteurs et le rang de matrices. Les qualifications suivantes s'expriment à l'aide de notions topologiques et analytiques. Ainsi, je ne ferai qu'une brève présentation des définitions en mettant quelques résultats plus importants en référence.

Définition 2.18. La qualification des contraintes de Kuhn-Tucker (KTCQ) est satisfaite en x^* si, pour tout vecteur non nul z tel que $\nabla g_i(x^*)z \leq 0$ (pour tout $i \in I^*$ et $\nabla h_j(x^*)z = 0, j = 1, \dots, p$), z est tangent à un arc $\alpha(\theta)$ une fois différentiable tel que $\alpha(0) = x^*$ et est contenu dans le domaine réalisable.

Il s'agit de la première qualification des contraintes à avoir été publiée, d'abord par Karush dans [Kar39], puis par Kuhn et Tucker dans [KT51]¹.

Cette QC, bien qu'importante historiquement, est maintenant considérée de moins grande importance avec la découverte des qualifications des contraintes d'Abadie et de Guignard, des qualifications encore plus faibles que KTCQ (ces deux qualifications seront présentées plus loin).

De plus, KTCQ est difficile à vérifier, limitant son utilisation par des algorithmes.

Remarque 2.19. Dans l'exemple 1.1, KTCQ n'est pas satisfaite. En effet, il existe deux vecteurs non nuls z_i tels que $\nabla g_i(x^*)z_i \leq 0 (i = 1, 2)$; il s'agit des vecteurs $z_1 = \alpha(1, 0)^t$ et $z_2 = \beta(-1, 0)^t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \geq 0$. Or, pour le vecteur z_1 , il n'existe pas d'arc différentiable tel que KTCQ soit satisfaite.

Remarque 2.20. Dans l'exemple 2.16, KTCQ est satisfaite. Ceci est expliqué par le fait que le vecteur problématique z_1 n'est plus tel que $\nabla g_i(x^*)z_1 \leq 0$ (car $\nabla g_4(x^*)z_1 > 0$). KTCQ est donc désormais vérifiée.

Théorème 2.21. *CRCQ implique KTCQ.*

Démonstration. Voir [Jan84, Proposition 2.3]

□

La qualification des contraintes suivante utilise les définitions de cône tangent aux contraintes et de cône linéarisé. Plusieurs articles incluent ces définitions (par exemple [Bur12], [Jan84], [Fle87] ou [Sol11]).

¹Karush a découvert cette qualification (et les conditions de KKT) 12 ans avant Kuhn et Tucker, au cours de sa maîtrise. Voir [Cot12] pour davantage d'informations.

Définition 2.22. [Bur12] La qualification des contraintes d’Abadie (ACQ) est satisfaite en x^* si le cône tangent aux contraintes actives est le même que le cône linéarisé au point x^* :

$$T(x^*) = L(x^*)$$

Puis, finalement, la qualification de Guignard nécessite un peu d’analyse fonctionnelle, en particulier la définition du cône polaire d’un ensemble convexe, qui ne sera pas présentée ici (voir [Roc70] pour plus d’informations).

Définition 2.23. [Bur12] La qualification des contraintes de Guignard (GCQ) est satisfaite en x^* si, avec les mêmes notations qu’à la définition 2.22, on a

$$T(x^*)^\circ = L(x^*)^\circ$$

où E° représente le polaire de l’ensemble E .

3 Conclusion

Les multiplicateurs de Lagrange étant un outil très puissant en optimisation non linéaire, il est naturel d’étudier les qualifications des contraintes permettant d’assurer l’existence de ces multiplicateurs en un point optimal. Dans cet article, nous expliquons certaines de ces qualifications et une intuition de leur comportement dans différentes situations. Nous énonçons aussi quelques exemples permettant de visualiser ces qualifications des contraintes et quand celles-ci peuvent échouer.

Il y a encore beaucoup à faire sur les qualifications des contraintes, entre autres au sujet des qualifications des contraintes d’ordre 2, non présentées dans cet article. CRCQ est aussi actuellement un sujet de recherche dans la communauté.

Références

- [Bur12] J. BURKE : Constraint Qualifications in Nonlinear Programming. Notes de cours Math 516, Printemps 2012.
- [Cot12] R. W. COTTLE : William Karush and the KKT theorem. *Doc. Math., J. DMV*, pages 255–269, 2012.
- [CW05] A.C. CHIANG et K. WAINWRIGHT : *Fundamental methods of mathematical economics*. McGraw-Hill, 2005.
- [Fle87] R. FLETCHER : *Practical Methods of Optimization*. Wiley-Interscience, Chichester, 1987.

- [FM90] A. V. FIACCO et G. P. MCCORMICK : *Nonlinear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1990.
- [Jan84] R. JANIN : Directional Derivative of the Marginal Function in Nonlinear Programming. *Math. Program. Study*, 21:110–126, 1984.
- [Kar39] W. KARUSH : Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions. Mémoire de maîtrise, Université de Chicago, 1939.
- [KT51] H. W. KUHN et A. W. TUCKER : Nonlinear Programming. *In Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492. University of California Press, 1951.
- [Lu11] S. LU : Implications of the Constant Rank Constraint Qualification. *Math. Prog.*, 126(2):365–392, 2011.
- [Roc70] R. Tyrrell ROCKAFELLAR : *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.
- [Sol11] M.V. SOLODOV : Constraint Qualifications. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, pages 255–269, 2011.
- [Spi83] J. E. SPINGARN : Partial inverse of a monotone operator. *Applied Mathematics and Optimization*, 10(1):247–265, 1983.

LUC MARCHAND

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: luc.marchand@usherbrooke.ca

A Démonstration de la proposition 2.9

Démonstration. Cette démonstration vient du professeur Jean-Pierre Dussault.

Notons q la cardinalité de I^* .

Soit le programme linéaire

$$\begin{aligned} \min_{(d,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \quad & z = u \\ \text{s. à.} \quad & \nabla g_{I^*}(x^*)d \leq ue \\ & \nabla h(x^*)d = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

où $e = (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^q$. On observe que $(d, u) = (0, 0)^t$ est toujours réalisable. La condition $\lambda g(x^*) = 0$ est camouflée dans le fait que l'on ne travaille que sur les contraintes d'indice dans I^* . Le dual de ce problème est

$$\begin{array}{ll}
\max_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p} & 0 \\
\text{s. à.} & \lambda \nabla g_{I^*}(x^*) + \mu \nabla h(x^*) = 0 \\
& \lambda e = 1 \\
& \lambda \geq 0
\end{array} \tag{4}$$

(\Rightarrow) On suppose d'abord que MFCQ est satisfaite. Alors, il existe une direction $\tilde{d} \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{array}{l}
\nabla g_{I^*}(x^*) \tilde{d} < 0 \\
h(x^*) \tilde{d} = 0
\end{array}$$

Posons $\nabla g_{I^*}(x^*) \tilde{d} \leq \alpha e < 0$. Ainsi, le problème primal (3) est tel que

$$\begin{array}{ll}
\min_{(d, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} & z = u \\
\text{sujet à} & \nabla g_{I^*}(x^*) \tilde{d} \leq ue \\
& \nabla h(x^*) \tilde{d} = 0
\end{array}$$

La solution u est clairement plus petite ou égale à $\alpha < 0$ alors que la solution du problème dual (4) est 0. On en déduit que le problème (3) n'est pas borné inférieurement et que le problème (4) n'est pas réalisable par le théorème de dualité faible. Alors il n'existe pas $\lambda \geq 0$ (μ libre et λ non tous nuls) tels que

$$\begin{array}{ll}
\lambda \nabla g_{I^*}(x^*) + \mu \nabla h(x^*) = 0 \\
\lambda \geq 0
\end{array} \tag{5}$$

qui est équivalent au résultat (2).

(\Leftarrow) On suppose d'abord que (2) est satisfait. Ceci veut dire qu'il n'existe pas $(\lambda, \mu) \neq 0$ tels que (5) est satisfait ou encore il n'existe pas (λ, μ) tels que (4) est réalisable. Ainsi, le dual est non réalisable. Par le théorème de dualité faible, on doit donc avoir le problème primal (3) non borné inférieurement (car réalisable en $d = 0, u = 0$), donc il existe $d \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{array}{l}
u < 0 \\
\nabla g_{I^*}(x^*) d \leq ue \\
\nabla h(x^*) d = 0
\end{array}$$

d'où on déduit MFCQ. □

Quadrilatères et pentagones dans le graphe d'échange

Catherine Masson et Jean-Philippe Morissette

RÉSUMÉ Les mutations successives faites sur un carquois Q sont régies par certaines relations. Dans cet article, on démontre deux de ces relations tout en donnant une application à l'étude des graphes d'échanges.

1 Introduction

La théorie des algèbres amassées a été introduite par Fomin et Zelevinsky au début du 21^e siècle [FZ01]. Une algèbre amassée est un anneau de polynômes à coefficients entiers sur un ensemble de variables, dites amassées, que l'on obtient successivement à partir d'un ensemble de n variables initiales et d'un carquois, en appliquant un processus récursif appelé mutation. Un carquois est un quadruplet représenté par des flèches, des points et deux fonctions associant à chaque flèche deux points, appelés sa source et son but. La mutation en un point i transforme un carquois en un autre, elle sera notée μ_{x_i} , où x_i est une indéterminée. De plus, on définit une graine comme étant une paire formée d'un carquois et d'un amas associé, ce dernier étant un ensemble d'indéterminées. Il est possible de regrouper les mutations reliées à un carquois Q dans un polyèdre qui est associé à un graphe, appelé graphe d'échange [BDP12]. Le graphe d'échange est obtenu comme suit : chaque sommet est une graine reliée à la graine initiale par mutations successives et il existe une arête entre deux sommets si on peut passer de l'un à l'autre par le biais d'une seule mutation. L'étude d'un graphe d'échange requiert le calcul des graines obtenues par mutations à partir d'une graine de départ, ce qui est un processus difficile. Cet article est principalement consacré à la démonstration d'un théorème permettant de faciliter l'étude des graphes d'échange et de réduire les calculs mentionnés auparavant.

Théorème 1.1. *Soit Q un carquois et i, j deux points de Q .*

- (a) *S'il n'existe aucune flèche entre i et j , alors $\mu_i\mu_j(Q) = \mu_j\mu_i(Q)$.*
- (b) *S'il existe une unique flèche ayant comme source le point i et comme but le point j , alors $\mu_j\mu_i(Q)$ est isomorphe à $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$.*

Les auteurs souhaitent remercier le CRSNG pour son financement et également remercier Ibrahim Assem, Thomas Brüstle et Vasilisa Shramchenko pour la supervision de cet article.

La relation (a) permet d'établir l'existence d'un quadrilatère dans le graphe d'échange dont ses sommets sont les graines correspondant aux carquois Q , $\mu_i(Q)$, $\mu_j(Q)$ et $\mu_i\mu_j(Q)$ lorsqu'il n'y a aucune flèche entre deux points de Q . La relation (b) permet d'établir l'existence d'un pentagone dans le graphe d'échange dont ses sommets sont les graines correspondant aux carquois Q , $\mu_i(Q)$, $\mu_j(Q)$, $\mu_i\mu_j(Q)$ et $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$ lorsqu'il existe exactement une flèche entre deux points de Q .

Cet article est organisé comme suit. La section 2 porte sur des définitions utiles pour la démonstration du théorème principal, celui-ci sera présenté dans la section 3. La section 4 est consacrée à l'application du théorème à l'étude du graphe d'échange.

2 Définitions

2.1 Carquois et mutations

Définition 2.1. On appelle *carquois* un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ formé de deux ensembles Q_0, Q_1 et de deux fonctions $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$. Les éléments de Q_0 sont appelés des *points* tandis que les éléments de Q_1 sont appelés des *flèches*. Soit α une flèche, alors $s(\alpha)$ est appelée la *source* de α et $t(\alpha)$ est appelé son *but*.

Exemple 2.2.

$$Q = \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Dans cet exemple, le carquois Q est formé de $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ et $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$. De plus, on a que $t(\alpha) = 2 = s(\beta)$, $s(\alpha) = 1$ et $t(\beta) = 3$.

Notation 2.3. Dans cet article, lorsqu'on parle du nombre de flèches entre deux points k et l , on note ce nombre à l'aide de l'alphabet latin, tandis que lorsqu'on parle de l'étiquette que l'on attribue à une flèche entre k et l , on note celle-ci à l'aide de lettres grecques.

Nous définissons maintenant la notion de mutation.

Remarque 2.4. Afin de pouvoir effectuer une mutation sur un carquois, ce dernier ne doit avoir ni boucles ni cycles orientés de longueur deux. Dans cet article, on se restreint donc aux carquois n'ayant ni boucles ni cycles de longueur deux.

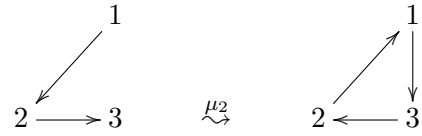
Définition 2.5. Soit Q un carquois sans boucles ni cycles de longueur deux.

On appelle *mutation* au point k , notée μ_k , l'opération qui définit le carquois $Q' = \mu_k(Q)$ à partir de Q , au moyen des règles suivantes :

1. Pour chaque chemin de longueur deux $i \rightarrow k \rightarrow j$ dans Q passant par k , ajouter une flèche $i \rightarrow j$ dans $\mu_k(Q)$.
2. Inverser, dans $\mu_k(Q)$, le sens de toutes les flèches incidentes à k .

3. Si deux flèches forment un cycle orienté de longueur deux dans le carquois obtenu de Q suite aux deux premières règles, les effacer du carquois.

Exemple 2.6.



Dans cet exemple, nous avons muté au point 2. Noter que dans cet exemple, on n'a pas créé de cycle de longueur deux, donc, on n'a pas eu besoin d'appliquer la règle 3.

2.2 Isomorphisme de carquois

Définition 2.7. Un *morphisme* de carquois $f : Q \rightarrow Q'$ est une paire d'applications $f = (f_0, f_1)$ avec $f_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0, f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$ tels que $s' \circ f_1 = f_0 \circ s$ et $t' \circ f_1 = f_0 \circ t$. Un *isomorphisme* de carquois est un morphisme bijectif. On note $Q \cong Q'$ lorsque Q et Q' sont isomorphes.

Exemple 2.8.

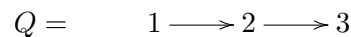


Les carquois Q et Q' sont isomorphes puisqu'on peut associer leurs points ainsi : $1 \mapsto c, 2 \mapsto a, 3 \mapsto d$ et $4 \mapsto b$ et leurs flèches de façon évidente. Notez que dans un carquois n'ayant pas de flèches multiples, la donnée de f_0 détermine f_1 uniquement.

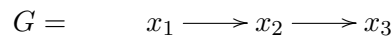
2.3 Graines

Définition 2.9. Une *graine* est une paire $G = (Q, X)$ où Q est un carquois ayant n points et X est un ensemble de n indéterminées, appelé *amas*, en bijection avec les points de Q .

Exemple 2.10. Soit l'amas $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et le carquois suivant :



alors, la graine $G = (Q, X)$ peut être représentée de la façon suivante :



3 Relation des mutations de carquois

Proposition 3.1. *Soit un carquois Q et $i, j \in Q_0$ tels qu'il n'y ait aucune flèche entre les deux points i et j . Alors, on a la relation suivante : $\mu_j\mu_i(Q) = \mu_i\mu_j(Q)$.*

Démonstration. Pour cette démonstration, nous allons vérifier la commutativité des mutations μ_i et μ_j pour les trois règles de mutations (voir la définition 2.5).

Pour la première étape de la mutation, supposons que l'on a un chemin $a \rightarrow i \rightarrow b$ et un chemin $c \rightarrow j \rightarrow d$ dans le carquois Q . Alors, la mutation μ_i ajoute la flèche $a \rightarrow b$ au carquois sans modifier les flèches incidentes à j . Par la suite, la mutation μ_j ajoute la flèche $c \rightarrow d$ sans modifier les flèches incidentes à i . Si l'on décide plutôt de commencer par la mutation μ_j , une flèche $c \rightarrow d$ sera ajoutée. Par la suite, la mutation μ_i ajoutera une flèche $a \rightarrow b$. Dans un cas comme dans l'autre, le résultat est le même : l'ajout des flèches $a \rightarrow b$ et $c \rightarrow d$.

Comme la troisième règle de mutation, effacer les cycles orientés de longueur deux, est dépendante de la création de nouvelles flèches et que la première étape est indépendante de l'ordre des mutations, alors la troisième l'est tout autant.

Pour la deuxième étape de la mutation, inverser le sens des flèches incidentes à i ou à j selon la mutation effectuée, la mutation μ_i change tout d'abord le sens des flèches incidentes à i , ce qui n'affecte pas les flèches incidentes à j . Par la suite, la mutation μ_j change le sens des flèches incidentes à j , ce qui n'affecte pas les flèches incidentes à i . Si l'on commence plutôt par la mutation μ_j , on change le sens des flèches incidentes à j . Ensuite, la mutation μ_i change le sens des flèches incidentes à i . Dans un cas comme dans l'autre, le résultat est le même : toutes les flèches incidentes à i et à j sont changées de sens exactement une fois. \square

Théorème 3.2. *Soit un carquois Q et $i, j \in Q_0$ tels qu'il y ait une unique flèche $i \rightarrow j$. Alors, on a la relation suivante : $\mu_j\mu_i(Q) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(Q)$.*

Plus précisément, les deux carquois coïncident à permutation des points i et j près.

3.1 Démonstration du théorème 3.2

On note, pour faciliter l'écriture dans la démonstration du théorème, t_k les carquois obtenus par mutations successives sur Q , au lieu de $\mu(Q)$. Pour la démonstration, chacun de ces carquois est associé à l'amas initial X de la graine $G = (Q, X)$, même si le carquois a muté.

Nous pouvons maintenant introduire deux monômes remarquables, mais tout d'abord une définition.

Définition 3.3. L'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ est l'ensemble de polynômes à coefficients entiers sur les indéterminées $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Définition 3.4. Les monômes $M_i(t)$ et $W_i(t)$ appartiennent à l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, où $\{x_1, \dots, x_n\}$ sont les éléments de l'amas initial X de $G = (Q, X)$ et où t est un carquois obtenu par mutations successives sur Q .

De plus, on associe le point i de Q à la variable x_i . Soit i un des points de Q , on note $\{i_1, \dots, i_{p_i}\}$ l'ensemble des prédécesseurs immédiats du point i dans t , et $\{j_1, \dots, j_{q_i}\}$ l'ensemble de ses successeurs immédiats. On convient que pour tout $1 \leq k \leq p_i$, il existe m_k flèches de i_k vers i , et pour tout $1 \leq l \leq q_i$, il existe n_l flèches de i vers j_l . Alors on pose

$$M_i(t) = \prod_{k=1}^{p_i} x_k^{m_k}$$

et

$$W_i(t) = \prod_{l=1}^{q_i} x_l^{n_l}.$$

Ainsi, $M_i(t)$ est le monôme représentant le produit de toutes les variables associées aux flèches entrant dans i pour le carquois t , où les variables sont les variables de l'amas initial, c'est-à-dire que les variables ne changent pas suite aux mutations. De même, $W_i(t)$ est le monôme représentant le produit de toutes les variables associées aux flèches sortant de i pour le carquois t . Ces deux monômes nous permettent donc de connaître les flèches incidentes à un point. Si on connaît tous les monômes associés à chacun des points, il est alors possible de reconstruire le carquois, car nous avons toutes les informations nécessaires (modulo les permutations des flèches ayant le même but et la même source). Cette notation a été inspirée par celle utilisée par Fomin et Zelevinsky dans [FZ01].

Exemple 3.5. Soit $G = (t_1, X)$ une graine avec $m, n, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$$G = \begin{array}{ccc} & x_p & x_q \\ & \downarrow m & \swarrow n \\ & x_i & \xrightarrow{s} x_r \end{array}$$

Dans cet exemple $M_i(t_1) = x_p^m x_q^n$ et $W_i(t_1) = x_r^s$.

Par abus de langage, on dit *les flèches* $M_i(t)$ et non pas les variables dans $M_i(t)$.

Pour les besoins de la démonstration, on pose $t_1 = Q$.

On peut définir successivement les carquois suivants

$$\begin{aligned} t_2 &= \mu_j(Q) \\ t_3 &= \mu_i \mu_j(Q) \\ t_4 &= \mu_j \mu_i \mu_j(Q) \\ t_5 &= \mu_i(Q) \\ t_6 &= \mu_j \mu_i(Q). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
t_2 = \mu_j(Q) \xrightarrow{\mu_i} t_3 = \mu_i \mu_j(Q) \xrightarrow{\mu_j} t_4 = \mu_j \mu_i \mu_j(Q) \\
\swarrow^{\mu_j} \\
t_1 = Q \\
\searrow_{\mu_i} \\
t_5 = \mu_i(Q) \xrightarrow{\mu_j} t_6 = \mu_j \mu_i(Q)
\end{array}$$

Les carquois que nous venons d'énumérer sont représentés dans le diagramme suivant.

Il ne faut pas oublier que tous ces carquois sont reliés à l'amas initial X de la graine $G = (Q, X)$.

La démonstration du théorème 3.2 se fera en deux étapes : nous allons d'abord comparer les flèches incidentes aux points i et j de deux carquois et les flèches incidentes aux autres points par la suite.

(a) Première partie de la preuve : les flèches incidentes aux points i et j .

Dans cette première partie, nous nous concentrons sur deux points $i, j \in Q_0$ tels qu'il existe une unique flèche $i \rightarrow j$ dans Q . Le but est de démontrer que pour toute flèche $k \rightarrow i$ (resp. $i \rightarrow k$) dans $\mu_j \mu_i(Q)$, il y a une flèche $k \rightarrow j$ (resp. $j \rightarrow k$) dans $\mu_j \mu_i \mu_j(Q)$ et que pour toute flèche $k \rightarrow j$ (resp. $j \rightarrow k$) dans $\mu_j \mu_i(Q)$, il y a une flèche $k \rightarrow i$ (resp. $i \rightarrow k$) dans $\mu_j \mu_i \mu_j(Q)$. Pour cela, nous démontrons que les flèches entrantes et sortantes de i dans l'un des deux carquois correspondent respectivement aux flèches entrantes et sortantes de j dans l'autre carquois.

Afin de démontrer ces égalités, nous exprimons les flèches entrantes et sortantes de i et j dans les carquois $\mu_j \mu_i(Q)$ et $\mu_j \mu_i \mu_j(Q)$ en fonction du carquois Q initial. Nous utilisons donc les monômes $M_k(t)$ et $W_k(t)$.

Notation 3.6. Soit α une flèche d'un carquois ayant k comme source et l comme but. On note α' une flèche ayant l comme source et k comme but.

Remarque 3.7. Comme on n'étudie pas la flèche entre i et j dans cette section, on ne met pas les variables x_i et x_j dans les monômes $M_k(t)$ et $W_k(t)$.

$$\text{On note donc } M_k(t)' = M_k(t) \Big|_{x_i=x_j=1} \text{ et } W_k(t)' = W_k(t) \Big|_{x_i=x_j=1}$$

Lemme 3.8. $M_j(t_4)' = M_i(t_6)' = M_j(t_1)' \cdot W_i(t_1)'$.

Démonstration. La preuve se fait en deux étapes.

(a) On veut montrer que $M_j(t_4)' = M_j(t_1)' \cdot W_i(t_1)'$.

On commence par montrer que les flèches entrantes en j dans t_1 ne disparaissent pas du carquois quand on applique la suite de mutations $\mu_j \mu_i \mu_j$.

En effet, lors de la première et de la troisième mutation, on mute en j , donc on inverse le sens des flèches incidentes à j à deux reprises, sans créer ni

effacer de nouvelles flèches incidentes à j . Le nombre de flèches entrantes dans j ne varie donc pas pour ces mutations.

Supposons que lors de la seconde mutation, μ_i , on ait effacé une des flèches entrantes en j dans t_1 , disons $k \rightarrow j$. Puisque cette flèche devient $\alpha : j \rightarrow k$ dans t_2 , il faut que t_2 contienne un chemin de longueur deux $k \rightarrow i \rightarrow j$ et cela est impossible, parce que t_2 contient la flèche $j \rightarrow i$. (Voir Figure 1)

Ainsi, toutes les flèches entrant en j dans t_1 sont entrantes en j dans t_4 .

En termes de monômes cela veut dire que $M_j(t_1)'$ divise $M_j(t_4)'$.

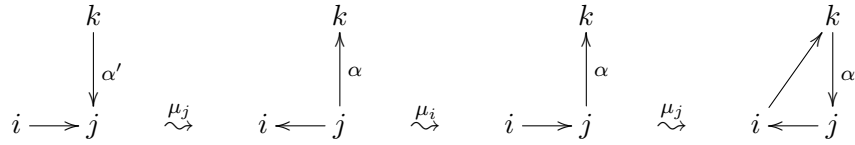


FIGURE 1 – Le comportement d’une flèche de $M_j(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$.

Il reste à montrer que les flèches entrant en j dans t_4 ne provenant pas des flèches entrant en j dans t_1 sont des flèches provenant de $W_i(t_1)'$.

En effet, il est possible d’avoir des chemins de longueur deux $j \rightarrow i \rightarrow k$ dans t_2 qui crée des flèches $\beta : j \rightarrow k$ dans t_3 (qui deviendront $k \rightarrow j$ dans t_4). Il suffit donc de s’intéresser aux flèches $\alpha : i \rightarrow k$ dans t_2 . Ces flèches correspondent aux flèches provenant de $W_i(t_1)'$, plus les flèches sortant de i créées lors de la première mutation, μ_j , par des chemins de longueur deux $i \rightarrow j \rightarrow k$. Or, les flèches sortant de i créées lors de la première mutation ne font qu’éliminer lors de μ_i la flèche $j \rightarrow k$ qui les a créées. (Voir Figure 2)

En termes de monômes cela veut dire que $W_i(t_1)'$ divise $M_j(t_4)'$.

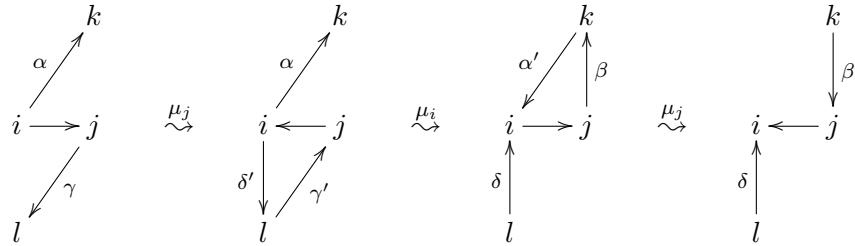


FIGURE 2 – Le comportement des flèches provenant de $W_j(t_1)$ et de $W_i(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$.

(b) On veut montrer que $M_i(t_6)' = M_j(t_1)' \cdot W_i(t_1)'$.

On commence par montrer que les flèches sortant de i dans t_1 ne disparaissent pas du carquois quand on applique la suite de mutations $\mu_j\mu_i$.

En effet, lors de la première mutation, on mute en i , on inverse donc le sens des flèches incidentes à i , sans créer ni effacer de nouvelles flèches. Toutes les flèches $i \rightarrow k$ dans t_1 deviennent donc entrantes en i dans t_5 .

Supposons maintenant que lors de la seconde mutation μ_j , on ait effacé une des flèches sortantes de i dans t_1 , disons $i \rightarrow k$. Comme cette flèche devient $k \rightarrow i$ dans t_5 , il faut que t_5 contienne un chemin de longueur deux $i \rightarrow j \rightarrow k$ et cela est impossible, parce que t_5 contient la flèche $j \rightarrow i$.

Donc toutes les flèches sortantes de i dans t_1 deviennent entrantes en i dans t_6 .

Il reste à montrer que les flèches entrantes en i dans t_6 ne provenant pas des flèches sortantes de i dans t_1 sont des flèches provenant de $M_j(t_1)'$.

En effet, il est possible de créer des flèches $\beta : k \rightarrow i$ dans t_6 avec un chemin de longueur deux $k \rightarrow j \rightarrow i$ dans t_5 , puisque t_5 contient la flèche $j \rightarrow i$. On s'intéresse donc aux flèches $k \rightarrow j$ dans t_5 , qui correspondent aux flèches $k \rightarrow j$ dans t_1 , soit les flèches provenant de $M_j(t_1)'$, plus les flèches entrant en j créées lors de la première mutation, μ_i dans t_5 . Or, les flèches entrant en j créées lors de la première mutation ne font qu'éliminer la flèche $k \rightarrow i$ de t_1 devenue $i \rightarrow k$ dans t_5 qui les a créées puisqu'il y a un chemin de longueur deux $k \rightarrow j \rightarrow i$ dans t_5 . Ainsi, les flèches entrant en j créées lors de la première mutation ne créent pas de flèches $k \rightarrow i$ dans t_6 . (Voir Figure 3)

Il suffit alors de montrer que les flèches de $M_j(t_1)'$ ne peuvent pas disparaître lors de la première mutation.

Supposons que lors de la première mutation, μ_i , on ait effacé une des flèches entrant en j dans t_1 , disons $\alpha : k \rightarrow j$. Il faut donc que t_1 contienne un chemin de longueur deux $j \rightarrow i \rightarrow k$ et cela est impossible, parce que t_1 contient la flèche $i \rightarrow j$. (Voir Figure 3)

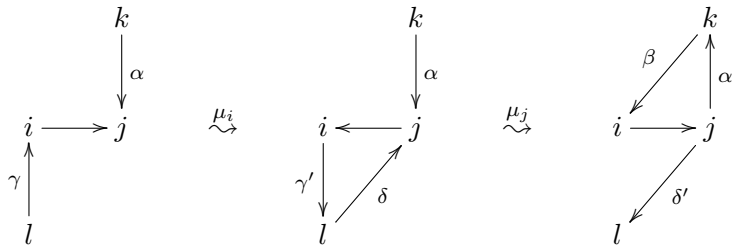


FIGURE 3 – Le comportement des flèches provenant de $M_j(t_1)$ et de $M_i(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i$.

□

Nous avons besoin de la notion suivante pour continuer la démonstration.

Définition 3.9. Soit Q un carquois, $x, y, z \in Q_0$ et $\alpha : z \rightarrow x$, $\beta : y \rightarrow z$.

Un ensemble $E_{(x,y)} \subseteq Q_1 \times Q_1$ est dit *fidèle* s'il vérifie les conditions suivantes :

- a) $(\alpha, \beta) \in E_{(x,y)}$ et $\lambda \neq \beta, \lambda : y \rightarrow z$ impliquent $(\alpha, \lambda) \notin E_{(x,y)}$
- b) $(\alpha, \beta) \in E_{(x,y)}$ et $\gamma \neq \alpha, \gamma : z \rightarrow x$ impliquent $(\gamma, \beta) \notin E_{(x,y)}$.

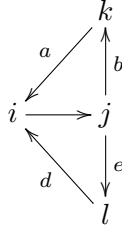
Un élément de $E_{(x,y)}$ est alors appelé un *couple fidèle*.

Le monôme $\text{CouF}_{(x,y)}(Q)$ associé au carquois Q est le produit de toutes les variables x_z associées aux points médians par tous les couples fidèles présents dans l'ensemble $E_{(x,y)}$ associé au carquois Q .

Remarque 3.10. Une autre façon de voir les termes du monôme $\text{CouF}_{(x,y)}(Q)$ est de considérer le minimum entre a et b , où a est le nombre de flèches $\alpha : z \rightarrow x$ et b est le nombre de flèches $\beta : y \rightarrow z$.

Alors, si $c = \min(a, b)$ on a que $\text{CouF}_{(x,y)}(Q) = x_z^c$.

Exemple 3.11. Soit Q le carquois suivant



Si l'on pose $c = \min(a, b)$ et $h = \min(d, e)$ alors

$$\text{CouF}_{(i,j)}(Q) = x_k^c \cdot x_l^h.$$

Lemme 3.12. $W_j(t_4)' = W_i(t_6)' = \text{CouF}_{(i,j)}(t_1)$.

Démonstration. La preuve se fait en deux étapes.

- (a) On veut montrer que $W_j(t_4)' = \text{CouF}_{(i,j)}(t_1)$.

On commence par montrer qu'on ne peut pas créer de flèches $j \rightarrow k$ en appliquant la suite de mutations $\mu_j \mu_i \mu_j$ à t_1 .

En effet, lors de la première et de la troisième mutation, on mute en j , et on inverse donc le sens des flèches incidentes à j à deux reprises, sans créer ni effacer de nouvelles flèches. Le nombre de flèches entrantes en j ne varie donc pas pour ces mutations.

Supposons que lors de la seconde mutation μ_i , on ait créé une flèche entrant dans j en t_3 , disons $k \rightarrow j$, qui deviendra sortante en j dans t_4 , disons

$j \rightarrow k$. Il faut donc que t_2 contienne un chemin de longueur deux $k \rightarrow i \rightarrow j$ et cela est impossible, parce que t_2 contient la flèche $j \rightarrow i$.

Il reste à montrer que toutes les flèches sortant de j dans t_4 proviennent d'un couple fidèle en t_1 .

Comme on s'intéresse aux flèches sortant de j dans t_4 et que l'on mute deux fois en j , il suffit de porter notre regard sur $W_j(t_1)'$ et de regarder lesquelles de ces flèches sont présentes à la fin. On peut remarquer rapidement qu'une flèche $\alpha : j \rightarrow k$ dans t_1 va s'éliminer après les trois mutations que l'on effectue. En effet, celle-ci, après la première mutation (μ_j), crée une flèche $\beta : i \rightarrow k$ et, par le fait même, un chemin de longueur deux $j \rightarrow i \rightarrow k$ qui va éliminer la flèche $\alpha' : k \rightarrow j$ dans t_2 . (Voir Figure 4)

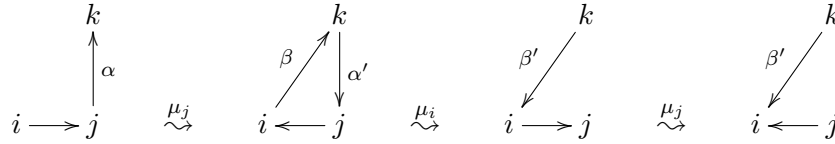


FIGURE 4 – Le comportement d'une flèche de $W_j(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$.

La seule façon d'empêcher la flèche β de faire disparaître la flèche α' est d'avoir une flèche $\gamma : k \rightarrow i$ dans t_1 qui empêchera la création de β . On peut remarquer que les flèches α et γ forment un couple fidèle et donc seule la présence d'un couple fidèle à qui α appartient dans t_1 permet d'avoir une flèche $j \rightarrow k$ dans t_4 .

(b) On veut montrer que $W_i(t_6)' = \text{CouF}_{(i,j)}(t_1)$.

On commence par montrer qu'on ne peut pas créer de flèches $i \rightarrow k$ en appliquant la suite de mutations $\mu_j\mu_i$ à t_1 .

En effet, lors de la première mutation, on mute en i , on inverse donc le sens des flèches incidentes à i , sans créer ni effacer de nouvelles flèches. Le nombre de flèches incidentes à i ne varie donc pas pour cette mutation.

Supposons que lors de la deuxième mutation, μ_j , on ait créé une flèche sortant de i en t_6 , disons $i \rightarrow k$. Il faut donc que t_5 contienne un chemin de longueur deux $i \rightarrow j \rightarrow k$ et cela est impossible, parce que t_5 contient la flèche $j \rightarrow i$.

Il reste donc à montrer que toutes les flèches sortant de i dans t_6 proviennent d'un couple fidèle en t_1 .

Comme on s'intéresse cette fois aux flèches sortant de i dans t_6 et que l'on mute une seule fois en i , il suffit de porter notre regard sur les flèches de $M_i(t_1)'$ et de regarder lesquelles de ces flèches sont présentes à la fin. On remarque rapidement qu'une flèche $\alpha : k \rightarrow i$ dans t_1 va s'éliminer

après les deux mutations $(\mu_j\mu_i)$ que l'on effectue. En effet, celle-ci, après la première mutation, crée une flèche $\beta : k \rightarrow j$ dans t_5 et, par le fait même, un chemin de longueur deux passant par j qui éliminera la flèche $\alpha' : i \rightarrow k$. (Voir Figure 5)

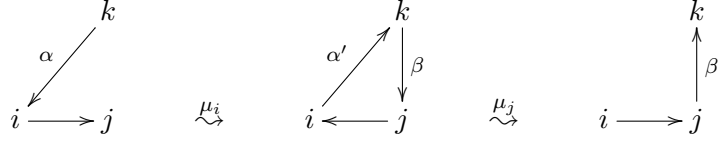


FIGURE 5 – Le comportement d'une flèche de $M_j(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i$.

La seule façon d'empêcher la flèche β de faire disparaître la flèche α est d'avoir une flèche $\gamma : j \rightarrow k$ dans t_1 qui empêchera l'apparition de β . On peut remarquer que les flèches α et γ forment un couple fidèle et donc seule la présence d'un couple fidèle à qui α appartient dans t_1 permet d'avoir une flèche $i \rightarrow k$ dans t_6 .

□

Lemme 3.13. $M_i(t_4)' = M_j(t_6)' = \frac{W_j(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)}$.

Démonstration. La preuve se fait en deux étapes.

(a) On prouve d'abord que $M_i(t_4)' = \frac{W_j(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)}$.

On commence par montrer que les flèches de $W_i(t_1)'$ ne peuvent pas devenir des flèches entrant en i dans t_4 lorsqu'il y a absence de flèches $j \rightarrow k$ dans t_1 . (La présence des flèches $j \rightarrow k$ est considérée plus bas)

Supposons que lors de la première mutation, μ_j , on ait effacé une des flèches sortant de i dans t_1 , disons $i \rightarrow k$. Il faut donc que t_1 contienne un chemin de longueur deux $k \rightarrow j \rightarrow i$ et cela est impossible, parce que t_1 contient la flèche $i \rightarrow j$. Alors, toutes les flèches de $W_i(t_1)$ restent sortant de i dans t_2 .

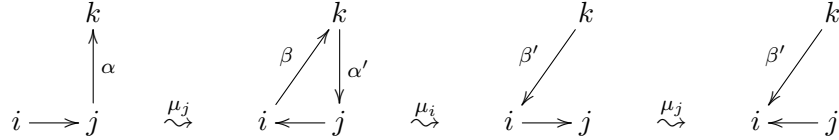
Lors de la deuxième mutation, on mute en i , alors toutes les flèches sortant de i dans t_1 deviennent entrantes et chaque flèche $\alpha : i \rightarrow k$ engendre une autre flèche $\beta : j \rightarrow k$ car il y a nécessairement un chemin de longueur deux $j \rightarrow i \rightarrow k$ dans t_2 . (Voir Figure 6)

Dans t_3 , on a les flèches $\alpha' : k \rightarrow i$ et $\beta : j \rightarrow k$. Comme t_3 contient la flèche $i \rightarrow j$, on a un chemin de longueur deux $i \rightarrow j \rightarrow k$ qui va engendrer, suite à la troisième mutation (μ_j) , une flèche $\gamma : i \rightarrow k$ qui éliminera α' . (Voir Figure 6)

Il faut ensuite montrer que les flèches de $W_j(t_1)'$ peuvent créer des flèches entrant en i dans t_4 .

FIGURE 6 – Le comportement d'une flèche de $W_i(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$.

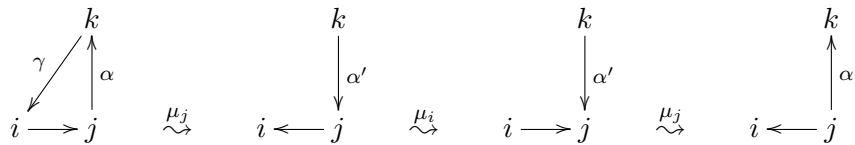
Les flèches de $W_j(t_1)'$, $\alpha : j \rightarrow k$, créent des flèches entrant en i dans t_4 en l'absence de flèches $k \rightarrow i$ dans t_1 . En effet, lors de la première mutation (μ_j), on crée une flèche sortant de i , $\beta : i \rightarrow k$, qui deviendra entrante en i après la deuxième mutation (μ_i). (Voir Figure 7)

FIGURE 7 – Le comportement d'une flèche de $W_j(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$.

Afin d'éliminer la flèche $\beta' : k \rightarrow i$ dans t_4 , on a besoin soit d'une flèche $j \rightarrow k$ dans t_3 , soit d'une flèche $\beta : k \rightarrow i$ dans t_1 .

Afin d'être dans le premier cas, il faudrait qu'il n'y ait pas de flèche $k \rightarrow j$ dans t_2 , ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de flèche $j \rightarrow k$ dans t_1 . Or, cela veut dire qu'il n'y aurait tout simplement pas de flèches β créées. Ce cas ne peut donc pas être considéré.

Le deuxième cas vient directement empêcher l'apparition de la flèche $i \rightarrow k$ dans t_2 . Ce cas correspond à l'existence d'un chemin de longueur deux $j \rightarrow k \rightarrow i$ dans t_1 , donc un couple fidèle. Ainsi, la présence d'un couple fidèle $j \rightarrow k \rightarrow i$ dans t_1 élimine une flèche $k \rightarrow i$ dans t_4 que l'on peut créer grâce à la flèche $j \rightarrow k$ dans t_1 . (Voir Figure 8)

FIGURE 8 – Le comportement d'un couple fidèle suite aux mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$.

(b) On prouve ensuite que $M_j(t_6)' = \frac{W_j(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)}$.

On commence par montrer qu'on ne peut pas créer de flèches $k \rightarrow j$ en appliquant la suite de mutations $\mu_j \mu_i$ à t_1 .

Supposons que lors de la première mutation, μ_i , on ait créé une flèche $j \rightarrow k$ qui deviendra entrante dans t_6 . Il faut donc que t_1 contienne un chemin de longueur deux $j \rightarrow i \rightarrow k$ et cela est impossible, parce que t_1 contient la flèche $i \rightarrow j$.

Lors de la deuxième mutation, on mute en j , donc on ne peut pas créer de nouvelles flèches incident à j .

Il faut ensuite montrer que les flèches de $W_j(t_1)'$ peuvent devenir des flèches entrant en j dans t_6 .

En général, on a que les flèches de $W_j(t_1)'$ deviennent des flèches entrantes en j dans t_6 . En effet, lors de la deuxième mutation (μ_j), toute flèche sortant de j devient entrante en j .

On remarque que les flèches de $W_j(t_1)'$, $\alpha : j \rightarrow k$, peuvent disparaître avant même de changer d'orientation et de devenir entrantes en j dans t_6 . En effet, il est possible de faire disparaître ces flèches s'il y a des flèches entrant en i dans t_1 de la forme $\beta : k \rightarrow i$. Dans ce cas, on a un chemin de longueur deux $k \rightarrow i \rightarrow j$ dans t_1 qui engendre une flèche $k \rightarrow j$ suite à μ_i . Cette nouvelle flèche $k \rightarrow j$ élimine la flèche α qui deviendrait entrante en j dans t_6 . Ce cas correspond en fait à avoir un couple fidèle. (Voir Figure 9)

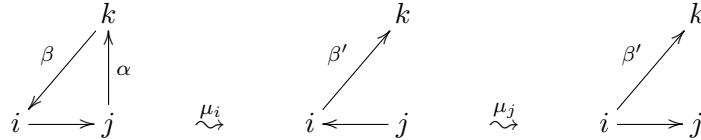


FIGURE 9 – Le comportement d'un couple fidèle suite aux mutations $\mu_j \mu_i$.

□

Lemme 3.14. $W_i(t_4)' = W_j(t_6)' = \frac{M_i(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)} \cdot M_j(t_1)'$.

Démonstration. La preuve se fait en deux étapes.

(a) On prouve d'abord que $W_i(t_4)' = \frac{M_i(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)} \cdot M_j(t_1)'$.

On commence par montrer que les flèches de $M_j(t_1)'$ créent des flèches sortantes de i dans t_4 .

On peut voir qu'une flèche $\alpha : k \rightarrow j$ entrant en j dans t_1 crée une flèche $\beta : i \rightarrow k$ sortant de i dans t_4 , car il existe un chemin de longueur deux

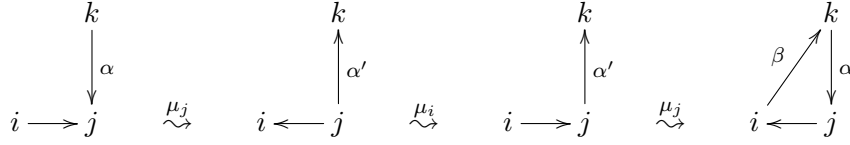


FIGURE 10 – Le comportement d'une flèche de $M_j(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$.

$i \rightarrow j \rightarrow k$ dans t_3 . Il suffit de montrer que les flèches de $M_j(t_1)'$ ne peuvent pas disparaître lors des deux premières mutations. (Voir Figure 10)

En effet, lors de la première mutation, on mute en j , alors on ne peut pas effacer de flèches incidentes à j .

Supposons que lors de la deuxième mutation μ_i , on ait effacé une flèche entrant en j dans t_1 , disons $k \rightarrow j$. Puisque cette flèche devient $j \rightarrow k$ dans t_2 , il faut que t_2 contienne un chemin de longueur deux $k \rightarrow i \rightarrow j$ et cela est impossible, parce que t_2 contient la flèche $j \rightarrow i$.

Il reste à montrer que les flèches de $M_i(t_1)'$ peuvent créer des flèches sortantes de i dans t_4 .

Une flèche entrante en i dans t_1 sera, en général, sortante dans t_4 puisqu'elle aura été renversée lors de la deuxième mutation (μ_i) et qu'elle ne peut pas disparaître lors de la dernière mutation (μ_j).

En effet, pour faire disparaître une flèche $i \rightarrow k$ lors de la dernière mutation il faudrait un chemin de longueur deux $k \rightarrow j \rightarrow i$, ce qui est impossible car dans t_3 on a la flèche $i \rightarrow j$.

Il est possible d'éliminer les flèches entrant en i dans t_1 dans la première mutation. En effet, s'il y a une flèche $\alpha : j \rightarrow k$ dans t_1 , cela crée un chemin de longueur deux $i \rightarrow j \rightarrow k$ qui vient éliminer une flèche $\beta : k \rightarrow i$. Cela correspond en fait à avoir un chemin de longueur deux $j \rightarrow k \rightarrow i$ dans t_1 , soit un couple fidèle. (Voir Figure 11)

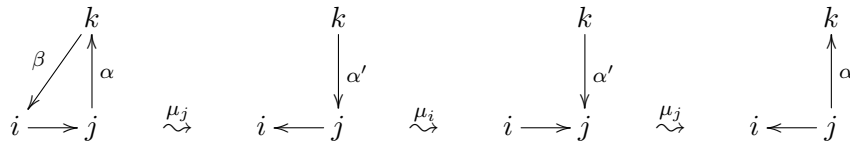


FIGURE 11 – Le comportement d'un couple fidèle suite aux mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$.

(b) On prouve ensuite que $W_j(t_6)' = \frac{M_i(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)} \cdot M_j(t_1)'$.

On commence par montrer que les flèches de $M_j(t_1)'$ créent des flèches sortantes de j dans t_6 .

Les flèches entrantes en j dans t_1 deviennent sortantes de j dans t_6 car on ne mute qu'une seule fois sur j . En effet, ces flèches ne peuvent pas disparaître. Lors de la première mutation, on mute en i , alors la flèche $j \rightarrow i$ est nécessaire afin de faire disparaître ces flèches. Or, cela est impossible.

Lors de la deuxième mutation, on mute en j , alors on ne peut pas créer ou effacer de flèches incidentes à j . Le nombre de flèches incidentes à j ne varie donc pas pour ces mutations.

Il faut ensuite montrer que les flèches de $M_i(t_1)'$ peuvent créer des flèches sortantes de j dans t_6 .

En général, une flèche $\alpha : k \rightarrow i$ entrante en i dans t_1 va créer une flèche $\beta : k \rightarrow j$ entrante en j lors de la première mutation μ_i , qui deviendra sortante suite à la deuxième mutation μ_j . (Voir Figure 12)

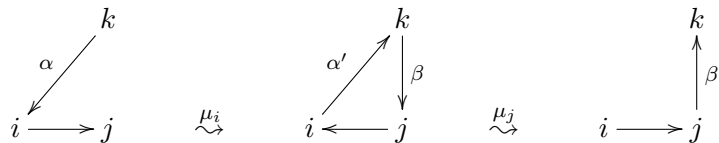


FIGURE 12 – Le comportement d’une flèche provenant de $M_j(t_1)$ suite aux mutations $\mu_j\mu_i$.

Dans le cas où il y aurait une flèche $j \rightarrow k$ dans t_1 , cette dernière élimine la flèche créée par la flèche entrant en i dans t_1 . Cela correspond en fait à avoir un chemin de longueur deux $j \rightarrow k \rightarrow i$ dans t_1 , soit un couple fidèle. Donc, la présence d’un couple fidèle $j \rightarrow j \rightarrow i$ dans t_1 élimine une flèche qui aurait pu devenir sortante de j dans t_6 .

□

Remarque 3.15. Soit Q un carquois et i et j deux points de Q tel qu’il y a une unique flèche $i \rightarrow j$.

Les lemmes 3.8, 3.12, 3.13 et 3.14 montrent que pour toutes flèches $k \rightarrow i$ (resp. $i \rightarrow k$) dans $\mu_j\mu_i(Q)$ il existe une flèche $k \rightarrow j$ (resp. $j \rightarrow k$) dans $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$ et que pour toutes flèches $k \rightarrow j$ (resp. $j \rightarrow k$) dans $\mu_j\mu_i(Q)$ il existe une flèche $k \rightarrow i$ (resp. $i \rightarrow k$) dans $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$. Ainsi, les flèches incidentes à i dans un des deux carquois sont incidentes à j dans l’autre.

(b) Deuxième partie de la preuve : les flèches incidentes aux points autres que i et j

Nous sommes maintenant rendus à la deuxième partie de la preuve. Dans cette partie, nous voulons prouver que les carquois t_4 et t_6 sont les mêmes si on exclut

les points i et j et leurs flèches incidentes. En d'autres termes, il faut montrer que les carquois t_4 et t_6 ont exactement les mêmes flèches entre leurs points qui ne sont pas i et j . Nous ne considérons pas dans cette partie les flèches touchant à i ou à j car ceci a été fait dans la première partie.

Commençons par énoncer et prouver quelques lemmes.

Pour ce faire, prenons Q un carquois qui possède les points i et j tel qu'il y a une unique flèche $i \rightarrow j$. De plus, appelons Q' un carquois tel que $Q'_0 = \{i, j, k, l\}$. Les points k et l sont deux points arbitraires dont l'ensemble, $\{k, l\}$, est relié par au moins une flèche à l'ensemble $\{i, j\}$. Ainsi, Q' est un sous-carquois plein de Q , ce qui veut dire qu'il contient toutes les flèches que Q a entre les points i, j, k et l . Posons sans perte de généralité qu'il n'y a pas de flèches entre k et l dans le carquois Q , donc dans t_1 , car nous allons travailler avec le nombre de nouvelles flèches entre k et l créées lors des mutations et donc le nombre initial de flèches importe peu. Pour la deuxième partie de la preuve, nous pouvons travailler seulement avec ces quatre points et vérifier si dans t_4 et t_6 il y a les mêmes flèches entre k et l .

Tout d'abord, il faut voir de quelle façon nous pouvons créer une flèche entre k et l lors des mutations sur i et sur j .

Pour μ_i , nous pouvons créer une flèche $k \rightarrow l$ si le carquois possède une flèche $k \rightarrow i$ et une flèche $i \rightarrow l$. Pour créer une flèche $l \rightarrow k$, il faut une flèche $l \rightarrow i$ et une flèche $i \rightarrow k$. (Voir Figure 13)

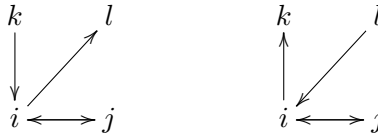


FIGURE 13 – Ces carquois représentent la forme générale des carquois pouvant générer une flèche entre k et l suite à μ_i . Remarquons que la flèche entre i et j est dans les deux sens, car son sens importe peu pour la création de flèches entre k et l . En effet, qu'elle soit $i \rightarrow j$ ou $i \leftarrow j$, pour le premier cas, il y aura toujours une flèche $k \rightarrow l$ de créée.

Pour μ_j , nous pouvons créer une flèche $k \rightarrow l$ si le carquois possède une flèche $k \rightarrow j$ et une flèche $j \rightarrow l$. Pour obtenir plutôt une flèche de $l \rightarrow k$, il faut une flèche $l \rightarrow j$ et une flèche $j \rightarrow k$. (Voir Figure 14)

Pour simplifier les choses, nous donnons une notation au nombre de flèches présentes dans le carquois Q' comme suit dans le tableau 1. Par exemple, s'il y a deux flèches $k \rightarrow i$ dans le carquois, on note $k \xrightarrow{2} i$.

Ces nombres de flèches ne peuvent être négatifs. Par exemple, si a est négatif, cela implique que les flèches sont, par convention, $i \rightarrow k$, et il n'y a donc pas de flèches $k \rightarrow i$. Ainsi, on a que $a > 0$ implique $a' = 0$ et $a' > 0$ implique $a = 0$. De même pour b et b' , d et d' ainsi que e et e' .



FIGURE 14 – Ces carquois représentent la forme générale des carquois pouvant générer une flèche entre k et l suite à μ_j . Remarquons que la flèche entre i et j est dans les deux sens, car son sens importe peu pour la création de flèches entre k et l .

Flèche	Nombre de flèches
$k \rightarrow i$	a
$i \rightarrow k$	a'
$l \rightarrow i$	b
$i \rightarrow l$	b'
$k \rightarrow j$	d
$j \rightarrow k$	d'
$l \rightarrow j$	e
$j \rightarrow l$	e'

TABLE 1 – Le nombre de flèches que l’on pose en fonction de leur source et de leur but, où $a, a', b, b', d, d', e, e' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Notation 3.16. Soit $x \in \mathbb{Z}$. On note $(x)_+$ le maximum entre x et 0. En d’autres termes, si x est négatif alors $(x)_+ = 0$ et si x est positif alors $(x)_+ = x$.

Lemme 3.17. Il y a $[ab' + (d+a-d')_+(e'-b-e)_+] - [a'b + (e+b-e')_+(d'-a-d)_+]$ flèches créées entre k et l lors de la suite de mutations $\mu_j \mu_i$ (selon les lettres du tableau 1).

Si le nombre de flèches est positif, alors les flèches sont dans le sens $k \rightarrow l$. Dans le cas contraire, les flèches sont dans le sens $l \rightarrow k$.

Démonstration. En utilisant le tableau 1, nous pouvons déterminer les flèches créées entre k et l lors de la mutation μ_i . En effet, pour créer une flèche $k \rightarrow l$ lors de μ_i , il faut une flèche $k \rightarrow i$ avec une flèche $i \rightarrow l$. Ainsi, cela implique qu’il y a ab' flèches $k \rightarrow l$ créées, car il y a a flèches $k \rightarrow i$ et b' flèches $i \rightarrow l$ (tableau 1). De même, pour créer une flèche $l \rightarrow k$ il faut une flèche $l \rightarrow i$ avec une flèche $i \rightarrow k$. Il y a donc $a'b$ flèches $l \rightarrow k$ créées, car il y a a' flèches $i \rightarrow k$ et b flèches $l \rightarrow i$.

En bref, la mutation μ_i de t_1 à t_5 crée :

$$ab' \text{ flèches } k \rightarrow l$$

et

$$a'b \text{ flèches } l \rightarrow k.$$

Flèche	Nombre de flèches
$k \rightarrow i$	a'
$i \rightarrow k$	a
$l \rightarrow i$	b'
$i \rightarrow l$	b
$k \rightarrow j$	$(d + a - d')_+$
$j \rightarrow k$	$(d' - a - d)_+$
$l \rightarrow j$	$(e + b - e')_+$
$j \rightarrow l$	$(e' - b - e)_+$

TABLE 2 – Le nombre de flèches dans t_5 en fonction de leur source et de leur but.

Nous pouvons maintenant déterminer le nombre de flèches entre chaque paire de points du carquois à la suite de la mutation μ_i et ainsi renouveler le tableau des nombres de flèches pour celui du carquois t_5 .

Commençons avec les flèches reliées à i . Lors de μ_i , toutes les flèches incidentes à i changent de sens, ce qui implique que, par exemple, les flèches $k \rightarrow i$ deviennent $i \rightarrow k$ et les flèches $i \rightarrow k$ deviennent $k \rightarrow i$. Ainsi, il y a désormais a' flèches $k \rightarrow i$ et a flèches $i \rightarrow k$. De même pour les flèches reliant i à l .

Pour les flèches reliées à j , il peut y avoir des changements suite à μ_i . Lors de μ_i , la flèche entre i et j est $i \rightarrow j$, ce qui implique que seules des flèches $k \rightarrow j$ et $l \rightarrow j$ peuvent être créées. Par exemple, pour les flèches $k \rightarrow j$, leur nombre est maintenant la quantité initiale d , additionnée à la quantité de nouvelles flèches a , moins le nombre de flèches d' dans l'autre sens au départ. La quantité de nouvelles flèches $k \rightarrow j$ dépend de la quantité de flèches $k \rightarrow i$ avant μ_i , car ce sont les chemins de longueur deux $k \rightarrow i \rightarrow j$ qui créent les nouvelles flèches $k \rightarrow j$ (et il y a toujours une seule flèche $i \rightarrow j$). Ainsi, il y a $(d + a - d')$ flèches $k \rightarrow j$ après μ_i . On fait de même pour les autres flèches reliées à j .

Cependant, il faut mentionner que les nombres de flèches trouvés ne peuvent être négatifs, car s'ils le sont, cela veut dire que les flèches sont dans l'autre sens, et donc qu'il n'y a aucune flèche dans le sens voulu, car il n'y a pas de cycles de longueur deux dans les carquois. Par exemple, pour $k \rightarrow j$, si $(d + a - d') < 0$, les flèches sont en fait $j \rightarrow k$ et il n'y a pas de flèches $k \rightarrow j$. Ainsi, nous notons $(d + a - d')_+$ pour indiquer que si le résultat de la parenthèse est négatif, on lui donne la valeur 0.

Les nombres des flèches dans t_5 sont donc :

Avec le tableau 2, nous pouvons déterminer les flèches créées entre k et l lors de la deuxième mutation, soit μ_j . En effet, pour créer une flèche $k \rightarrow l$ lors de μ_j , il faut une flèche $k \rightarrow j$ avec une flèche $j \rightarrow l$. Ainsi, cela implique qu'il y a $(d + a - d')_+(e' - b - e)_+$ flèches $k \rightarrow l$ de créées, car il y a $(d + a - d')_+$ flèches $k \rightarrow j$ et $(e' - b - e)_+$ flèches $j \rightarrow l$ (tableau 2). De même, pour créer une flèche $l \rightarrow k$ il faut une flèche $l \rightarrow j$ avec une flèche $j \rightarrow k$. Il y a donc $(e + b - e')_+(d' - a - d)_+$ flèches $l \rightarrow k$ de créées, car il y a $(d' - a - d)_+$ flèches

$j \rightarrow k$ et $(e + b - e')_+$ flèches $l \rightarrow j$.

Ainsi, la mutation μ_j de t_5 à t_6 crée :

$$(d + a - d')_+(e' - b - e)_+ \text{ flèches } k \rightarrow l$$

et

$$(e + b - e')_+(d' - a - d)_+ \text{ flèches } l \rightarrow k.$$

Nous avons maintenant le nombre de flèches entre k et l créées lors de μ_i et lors de μ_j . Nous pouvons donc déterminer le nombre total de flèches nouvelles dans t_6 .

Si on pose que le nombre de flèches est positif quand le sens est $k \rightarrow l$ et qu'il est négatif quand le sens est $l \rightarrow k$, il y a donc $[ab' + (d + a - d')_+(e' - b - e)_+] - [a'b + (e + b - e')_+(d' - a - d)_+]$ flèches créées entre k et l lors de la suite de mutations $\mu_j\mu_i$. (Afin de faciliter la lecture, on utilisera la notation Flèches $k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i}$ lorsqu'on voudra faire référence à ce nombre de flèches.) □

Lemme 3.18. *Il y a $\{de' + (a - d' - a')_+(b' + e' - b)_+ + [d' - (a' + d' - a)_+ - d]_+[e + (b' + e' - b)_+ - e']_+\} - \{ed' + (b - e' - b')_+(a' + d' - a)_+ + [e' - (b' + e' - b)_+ - e]_+[d + (a' + d' - a)_+ - d']_+\}$ flèches créées entre k et l lors de la suite de mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$ (selon les lettres du tableau 1).*

Si le nombre de flèches est positif, alors les flèches sont dans le sens $k \rightarrow l$. Dans le cas contraire, les flèches sont dans le sens $l \rightarrow k$.

Démonstration. Pour cette démonstration, nous travaillons encore avec le tableau 1 pour les nombres initiaux des flèches entre chaque point du carquois Q' . Comme les flèches $k \rightarrow l$ créées dépendent des couples $k \rightarrow j$ et $j \rightarrow l$, nous obtenons de' flèches $k \rightarrow l$. De plus, comme les flèches $l \rightarrow k$ dépendent des couples $l \rightarrow j$ et $j \rightarrow k$, nous obtenons ed' flèches $l \rightarrow k$.

Ainsi, la mutation μ_j de t_1 à t_2 crée :

$$de' \text{ flèches } k \rightarrow l$$

et

$$ed' \text{ flèches } l \rightarrow k.$$

Nous pouvons ensuite déterminer le nombre de flèches entre chaque point du carquois à la suite de la mutation μ_j et ainsi renouveler le tableau des nombres de flèches pour obtenir celui du carquois t_2 .

Commençons avec les flèches reliées à j . Lors de μ_j , toutes les flèches touchant à j changent de sens, ce qui implique que la quantité de flèches $x \rightarrow j$ devient la quantité de flèches $j \rightarrow x$ et vice-versa.

De plus, il peut y avoir des changements dans les flèches reliées à i lors de la mutation μ_j . En effet, lors de μ_j , la flèche entre i et j est $i \rightarrow j$, ce qui peut créer des flèches $i \rightarrow k$ et $i \rightarrow l$. Alors, si on prend comme exemple les flèches $k \rightarrow i$, leur nombre est maintenant la quantité initiale a , à laquelle l'on soustrait la quantité d' de nouvelles flèches $i \rightarrow k$ car elles sont dans le sens opposé, moins la quantité a' des flèches dans l'autre sens au départ. La quantité de nouvelles flèches $i \rightarrow k$ dépend de la quantité de flèches $j \rightarrow k$ avant μ_j , car ce sont les

chemins de longueur deux $i \rightarrow j \rightarrow k$ qui créent les nouvelles flèches $i \rightarrow k$ lors de la mutation (et que la quantité de la flèche $i \rightarrow j$ est toujours 1). Il y a donc $(a - d' - a')$ flèches $k \rightarrow i$ après μ_j . On fait de même pour les autres flèches reliées à i . Encore une fois, si le nombre de flèches est négatif on doit le poser 0. Ainsi on note plutôt $(a - d' - a')_+$.

Le tableau pour t_2 est donc :

Flèche	Nombre de flèches
$k \rightarrow i$	$(a - d' - a')_+$
$i \rightarrow k$	$(a' + d' - a)_+$
$l \rightarrow i$	$(b - e' - b')_+$
$i \rightarrow l$	$(b' + e' - b)_+$
$k \rightarrow j$	d'
$j \rightarrow k$	d
$l \rightarrow j$	e'
$j \rightarrow l$	e

Tableau 3

Avec le tableau 3, nous pouvons déterminer les flèches créées entre k et l lors de la deuxième mutation, soit μ_i , par les mêmes méthodes qu'auparavant.

Alors, la mutation μ_i de t_2 à t_3 crée :

$$(a - d' - a')_+(b' + e' - b)_+ \text{ flèches } k \rightarrow l$$

et

$$(b - e' - b')_+(a' + d' - a)_+ \text{ flèches } l \rightarrow k.$$

Nous pouvons par la suite utiliser les mêmes méthodes que précédemment pour déterminer les quantités des flèches entre chaque paire de points du carquois suite à la mutation μ_i .

Nous obtenons de cette façon ce nouveau tableau des nombres de flèches pour t_3 :

Flèche	Nombre de flèches
$k \rightarrow i$	$(a' + d' - a)_+$
$i \rightarrow k$	$(a - d' - a')_+$
$l \rightarrow i$	$(b' + e' - b)_+$
$i \rightarrow l$	$(b - e' - b')_+$
$k \rightarrow j$	$[d' - (a' + d' - a)_+ - d]_+$
$j \rightarrow k$	$[d + (a' + d' - a)_+ - d']_+$
$l \rightarrow j$	$[e' - (b' + e' - b)_+ - e]_+$
$j \rightarrow l$	$[e + (b' + e' - b)_+ - e']_+$

Tableau 4

Il ne reste qu'une mutation à effectuer, soit μ_j . Grâce au tableau 4 nous pouvons déterminer les flèches entre k et l créées lors de cette mutation de la même façon qu'auparavant.

Ainsi, la mutation μ_j de t_3 à t_4 crée :

$$\begin{aligned}
& [d' - (a' + d' - a)_+ - d]_+[e + (b' + e' - b)_+ - e']_+ \text{ flèches } k \rightarrow l \\
& \quad \text{et} \\
& [e' - (b' + e' - b)_+ - e]_+[d + (a' + d' - a)_+ - d']_+ \text{ flèches } l \rightarrow k.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi toutes les nouvelles flèches entre k et l lors de μ_j, μ_i et puis μ_j . Nous pouvons donc déterminer le nombre total de nouvelles flèches.

Si l'on considère encore une fois qu'un nombre de flèches positif implique le sens $k \rightarrow l$ et négatif le sens inverse, on a donc qu'il y a $\{de' + (a - d' - a')_+(b' + e' - b)_+ + [d' - (a' + d' - a)_+ - d]_+[e + (b' + e' - b)_+ - e']_+\} - \{ed' + (b - e' - b')_+(a' + d' - a)_+ + [e' - (b' + e' - b)_+ - e]_+[d + (a' + d' - a)_+ - d']_+\}$ flèches créées entre k et l lors de la suite de mutations $\mu_j\mu_i\mu_j$. (Afin de faciliter la lecture, on utilisera la notation Flèches $k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i\mu_j}$ lorsqu'on voudra faire référence à ce nombre de flèches.) □

Lemme 3.19. *Il y a le même nombre de flèches en t_6 et en t_4 entre k et l .*

Démonstration. Les expressions pour les nombres de flèches entre k et l dans les carquois t_4 et t_6 sont données dans le lemme 3.17 et le lemme 3.18 respectivement. Il faut vérifier que ces expressions coïcident, c'est-à-dire il faut montrer que

$$\text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i} = \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i\mu_j} \quad (1)$$

Il faut d'abord rappeler que dans le carquois initial Q' , a et a' ne peuvent être non nuls en même temps, et donc $a > 0$ implique $a' = 0$ et, $a' > 0$ implique $a = 0$. De même pour b et b' , d et d' et e et e' . Ainsi, parmi les huit variables il y en a au moins quatre qui sont nulles peu importe le carquois.

Il y a 16 cas possibles de groupe de variables nulles :

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $a = b = d = e = 0$. | 9. $a' = b' = d' = e = 0$. |
| 2. $a' = b = d = e = 0$. | 10. $a' = b' = d = e' = 0$. |
| 3. $a = b' = d = e = 0$. | 11. $a' = b = d' = e' = 0$. |
| 4. $a = b = d' = e = 0$. | 12. $a = b' = d' = e' = 0$. |
| 5. $a = b = d = e' = 0$. | 13. $a = b = d' = e' = 0$. |
| 6. $a' = b' = d = e = 0$. | 14. $a = b' = d' = e = 0$. |
| 7. $a' = b = d' = e = 0$. | 15. $a = b' = d = e' = 0$. |
| 8. $a' = b = d = e' = 0$. | 16. $a' = b' = d' = e' = 0$. |

Pour vérifier l'équation 1, il faut comparer les termes à gauche et à droite pour ces 16 cas. Si dans tous les cas les termes donnent le même résultat, on

concluera qu'ils sont égales et donc qu'il y a le même nombre de flèches créées entre k et l lors des suites de mutations $\mu_j\mu_i$ et $\mu_j\mu_i\mu_j$.

Il reste à vérifier les 16 cas. Il faut se remémorer que $a, a', b, b', d, d', e, e'$ sont tous positifs ou nuls.

Cas 1

$$a = b = d = e = 0.$$

Pour t_6

$$\begin{aligned} \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i} &= [0 \cdot b' + (0 + 0 - d')_+(e' - 0 - 0)_+] \\ &\quad - [a' \cdot 0 + (0 + 0 - e')_+(d' - 0 - 0)_+] \\ &= [(-d')_+(e')_+] - [(-e')_+(d')_+] \\ &= [0 \cdot (e')] - [0 \cdot (d')] \\ &= 0. \end{aligned}$$

$(-d')_+ = 0$, car d' est positif donc $-d'$ est négatif. $(e')_+ = (e')$ car e' est positif donc le maximum entre e' et 0 sera e' .

Pour t_4

$$\begin{aligned} \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i\mu_j} &= \{(-d' - a')_+(b' + e')_+ + [d' - (a' + d')_+]_+[(b' + e')_+ - e']_+\} \\ &\quad - \{(-e' - b')_+(a' + d')_+ + [e' - (b' + e')_+]_+[(a' + d')_+ - d']_+\} \\ &= \{0 \cdot (b' + e') + [d' - a' - d']_+[b' + e' - e']_+\} \\ &\quad - \{0 \cdot (a' + d') + [e' - b' - e']_+[a' + d' - d']_+\} \\ &= \{0 + (-a')_+(b')_+\} - \{0 + (-b')_+(a')_+\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On obtient 0 des deux côtés et donc les deux expressions sont égales pour le cas $a = b = d = e = 0$.

Cas 2

$$a' = b = d = e = 0.$$

Pour t_6

$$\begin{aligned} \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i} &= [ab' + (0 + a - d')_+(e' - 0 - 0)_+] \\ &\quad - [0 + (0 + 0 - e')_+(d' - a - 0)_+] \\ &= [ab' + (a - d')_+(e')_+] - [(-e')_+(d' - a)_+] \\ &= [ab' + (a - d')_+(e')] - [0 \cdot (d' - a)_+] \\ &= [ab' + (a - d')_+(e')] - 0 \\ &= [ab' + (a - d')_+(e')]. \end{aligned}$$

Si $a > d'$,

alors $(a - d') > 0$ et donc $(a - d')_+ = (a - d')$. L'expression devient

$$[ab' + (a - d')e'] = ab' + ae' - d'e'.$$

Si $a < d'$,

alors $(a - d') < 0$ et donc $(a - d')_+ = 0$. L'expression devient

$$[ab' + 0 \cdot e'] = ab'.$$

Pour t_4

$$\begin{aligned} \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j \mu_i \mu_j} &= \{(a - d')_+(b' + e')_+ + [d' - (d' - a)_+]_+[(b' + e')_+ - e']_+\} \\ &\quad - \{(-e' - b')_+(d' - a)_+ + [e' - (b' + e')_+]_+[(d' - a)_+ - d']_+\} \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+[b' + e' - e']_+\} \\ &\quad - \{0 \cdot (d' - a)_+ + [e' - b' - e']_+[(d' - a)_+ - d']_+\} \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+[b']_+\} \\ &\quad - \{0 + [-b']_+[(d' - a)_+ - d']_+\} \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+b'\} \\ &\quad - \{0 \cdot [(d' - a)_+ - d']_+\} \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+b'\} - 0 \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+b'\}. \end{aligned}$$

Si $a > d'$, cette expression devient

$$\begin{aligned} &\{(a - d')(b' + e') + [d' - 0]_+b'\} \\ &= \{ab' + ae' - d'b - d'e' + d'b'\} \\ &= ab' + ae' - d'e'. \end{aligned}$$

Si $a < d'$, cette expression devient

$$\begin{aligned} &\{0 \cdot (b' + e') + [d' - (d' - a)]_+b'\} \\ &= \{0 + [a]_+b'\} \\ &= ab'. \end{aligned}$$

Ainsi, dans les deux cas on obtient $ab' + ae' - d'e'$ lorsque $a > d'$ et ab' lorsque $a < d'$. Les deux expressions sont donc les mêmes dans le cas $a' = b = d = e = 0$.

Les autres cas se vérifient de façon analogue et on peut alors déterminer que les deux expressions sont égales dans les 16 cas.

□

Remarque 3.20. Soit Q un carquois et i et j deux points de Q tels qu'il y a une unique flèche $i \rightarrow j$.

Les lemmes 3.17, 3.18 et 3.19 montrent que t_6 et t_4 ont le même nombre de flèches créées dans le même sens entre k et l . S'il y a le même nombre de flèches créées, alors il y a le même nombre de flèches totales, car t_4 et t_6 ont le même carquois initial t_1 . Les points k et l étant arbitraires, cela est vrai pour tout couple de points du carquois voisins de i ou de j . Ainsi, t_6 a exactement les mêmes flèches (sens et quantité) entre les points voisins de i et j que t_4 . De plus, il est évident que les suites de mutations n'affectent pas les flèches incidentes aux points non voisins de i et de j . Ainsi, les carquois $\mu_j\mu_i(Q)$ et $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$ sont les mêmes si on exclut les flèches incidentes aux points i et j .

4 Le graphe d'échange

4.1 Graines et mutations

Définition 4.1. La *mutation d'une graine* $G = (Q, X)$ au point k est donnée par $\mu_k(G) = (\mu_k(Q), \mu_k(X))$, où la *mutation d'un amas* $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ en x_k est donnée par $\mu_k(X) = X \setminus \{x_k\} \cup \{x_k'\}$. De plus, $x_k' = \frac{1}{x_k} \cdot (\prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j)$, où les produits sont pris sur l'ensemble des flèches de but j ou de source i , respectivement.

Ainsi, une mutation sur une graine correspond à l'application simultanée de la mutation sur son carquois et de la mutation sur son amas.

Remarque 4.2. Par convention, on attribue une valeur de 1 au produit vide de $\prod_{i \rightarrow k} x_i$ ou de $\prod_{k \rightarrow j} x_j$.

Exemple 4.3. Soit G la graine suivante :

$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3$$

Alors, $\mu_1(G)$ correspond à la graine suivante :

$$\frac{x_2+1}{x_1} \longleftarrow x_2 \longrightarrow x_3$$

Définition 4.4. Soit $G = (Q, X)$ une graine. On nomme *variables initiales* les variables de l'amas X . De plus, on nomme *variables amassées* les variables de tous les amas pouvant être obtenus par mutations successives sur G . Notons également \mathfrak{X} l'ensemble des variables amassées.

Définition 4.5. Soit $G = (Q, X)$ une graine et \mathfrak{X} l'ensemble des variables amassées obtenues grâce à cette graine. L'*algèbre amassée* $\mathcal{A}(Q, X)$ est l'anneau de polynômes à coefficients entiers sur les variables de \mathfrak{X} , soit $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$.

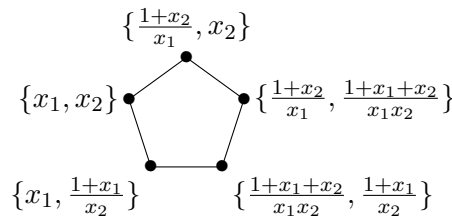
4.2 Graphe d'échange

Définition 4.6. Le *graphe d'échange* $\Gamma(G)$ d'une graine $G = (Q, X)$ est un graphe dont les points sont toutes les graines pouvant être obtenues par mutations successives sur G . Si la cardinalité de X est n , deux points sont reliés dans le graphe si l'intersection des amas de leur graine est un ensemble de cardinalité $n - 1$.

Exemple 4.7.

$$\begin{array}{lll}
 G = & x_1 \longrightarrow x_2 & X = \{x_1, x_2\} \\
 \\
 \mu_1(G) = & \frac{1+x_2}{x_1} \longleftarrow x_2 & \mu_1(X) = \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2 \right\} \\
 \\
 \mu_2(G) = & x_1 \longleftarrow \frac{1+x_1}{x_2} & \mu_2(X) = \left\{ x_1, \frac{1+x_1}{x_2} \right\} \\
 \\
 \mu_2\mu_1(G) = & \frac{1+x_2}{x_1} \longrightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} & \mu_2\mu_1(X) = \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \right\} \\
 \\
 \mu_1\mu_2(G) = & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \longrightarrow \frac{1+x_1}{x_2} & \mu_1\mu_2(X) = \left\{ \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\} \\
 \\
 \mu_1\mu_2\mu_1(G) = & \frac{1+x_1}{x_2} \longleftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} & \mu_1\mu_2\mu_1(X) = \left\{ \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \right\}
 \end{array}$$

Les graines $\mu_1\mu_2(G)$ et $\mu_1\mu_2\mu_1(G)$ sont identiques, elles correspondent donc au même point dans le graphe d'échange. Cet exemple permet de constater qu'il n'existe que 5 graines différentes pouvant être obtenues à partir de la graine G . On a donc le graphe d'échange qui suit :



Remarque 4.8. Dans une algèbre amassée donnée, l'amas définit la graine, voir [GSV07]. Ainsi, nous pouvons affirmer sans perte de généralité que les points du graphe d'échange de $G = (Q, X)$ correspondent aux amas obtenus par mutations successives sur X .

4.3 Application des relations de mutations dans le graphe d'échange

Avant d'énoncer l'un des deux théorèmes principaux de cette section, généralisons aux graines la proposition 3.1, soit que $\mu_i\mu_j(Q) = \mu_j\mu_i(Q)$ lorsqu'il n'y a pas de flèche entre i et j dans un carquois Q .

Proposition 4.9. *Soit une graine $G = (Q, X)$ et i, j deux points de Q tels qu'il n'y ait pas de flèche entre i et j . Alors, $\mu_j\mu_i(X) = \mu_i\mu_j(X)$.*

Démonstration. La démonstration est évidente puisque les mutations μ_i et μ_j sont indépendantes. \square

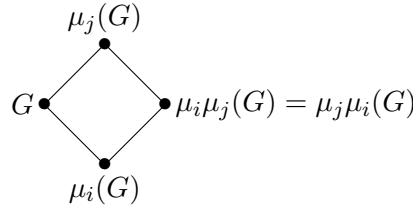
Théorème 4.10. *Soit $G = (Q, X)$ une graine telle qu'il n'y ait pas de flèche entre deux points i et j de Q . Alors $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$.*

Démonstration. Grâce à la proposition 3.1 nous savons que les carquois $\mu_i\mu_j(Q)$ et $\mu_j\mu_i(Q)$ sont égaux et grâce à la proposition 4.9 nous savons que les amas $\mu_i\mu_j(X)$ et $\mu_j\mu_i(X)$ sont égaux. Ainsi, cela implique que les graines sont égales, car elles ont le même carquois et le même amas. \square

Le théorème qui suit énonce l'application du théorème 4.10 aux graphes d'échange.

Théorème 4.11. *Soit $G = (Q, X)$ une graine telle qu'il n'y ait pas de flèche entre deux points i et j de Q .*

Les points associés aux graines $G, \mu_i(G), \mu_j(G), \mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$ forment un quadrilatère, qui correspond à un sous-graphe plein du graphe d'échange, comme suit :



Démonstration. Pour qu'un tel quadrilatère se retrouve dans le graphe d'échange, il faut que les quatre points soient associés à quatre graines différentes. Comme l'amas définit la graine, il suffit que les quatre points soient associés à quatre amas différents.

Voici toutes les paires de graines possibles où nous devons vérifier si leur amas sont distincts :

- G et $\mu_j(G)$
- G et $\mu_i(G)$
- $\mu_j(G)$ et $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$
- $\mu_i(G)$ et $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$
- G et $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$
- $\mu_j(G)$ et $\mu_i(G)$

Supposons que $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ et $i \neq j$.

Alors, on a que $\mu_i(X) = \{x_1, \dots, x_i', \dots, x_j, \dots, x_n\}$.

Or, $x_i \neq x_i'$ et donc $X \neq \mu_i(X)$. Cela implique que G et $\mu_j(G)$, G et $\mu_i(G)$, $\mu_j(G)$ et $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$ et $\mu_i(G)$ et $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$ ne peuvent être le même amas.

De plus, on a que $\mu_i\mu_j(X) = \{x_1, \dots, x_i', \dots, x_j', \dots, x_n\}$. Pour que $\mu_i\mu_j(X)$ et X correspondent au même amas, il y a deux cas à considérer. Dans le premier, il faudrait que $x_i = x_i'$ et $x_j = x_j'$ et dans le deuxième, il faudrait que $x_i = x_j'$ et $x_j = x_i'$. Or, on sait que $x_i \neq x_i'$, il suffit de s'assurer que $x_i \neq x_j'$ ou que $x_j \neq x_i'$ pour montrer qu'il s'agit de deux amas différents.

Supposons que $x_j = x_i'$. Alors, l'amas $\mu_i(X) = \{x_1, \dots, x_i', \dots, x_j, \dots, x_n\}$ contient deux variables identiques. Or cela est impossible, on en déduit que G et $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$ ne peuvent être le même amas.

De même, on trouve que $\mu_j(G)$ et $\mu_i(G)$ ne peuvent être le même amas.

Ainsi, les 4 amas sont bien distincts dans le graphe d'échange et forment un quadrilatère.

□

Généralisons maintenant aux graines le théorème 3.2 introduit dans la section 3, soit que $\mu_j\mu_i\mu_j(Q) \cong \mu_j\mu_i(Q)$ lorsqu'il y a une unique flèche entre $i \rightarrow j$ dans un carquois Q . Commençons par démontrer l'égalité des amas.

Tout d'abord, notons les six graines suivantes :

$$\begin{aligned}
g_1 &= (Q, X), & \text{où } X &= \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\} \\
g_2 &= (\mu_j(Q), \mu_j(X)), & \text{où } \mu_j(X) &= \{x_1, \dots, x_i, \dots, y_j, \dots, x_n\} \\
g_3 &= (\mu_i\mu_j(Q), \mu_i\mu_j(X)), & \text{où } \mu_i\mu_j(X) &= \{x_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, x_n\} \\
g_4 &= (\mu_j\mu_i\mu_j(Q), \mu_j\mu_i\mu_j(X)), & \text{où } \mu_j\mu_i\mu_j(X) &= \{x_1, \dots, y_i, \dots, z_j, \dots, x_n\} \\
g_5 &= (\mu_i(Q), \mu_i(X)), & \text{où } \mu_i(X) &= \{x_1, \dots, z_i, \dots, x_j, \dots, x_n\} \\
g_6 &= (\mu_j\mu_i(Q), \mu_j\mu_i(X)), & \text{où } \mu_j\mu_i(X) &= \{x_1, \dots, z_i, \dots, w_j, \dots, x_n\}
\end{aligned}$$

Remarque 4.12. Dans cette section, les monômes $M_k(g)$ et $W_k(g)$ font référence non pas à l'amas de départ comme dans la section 3, mais à l'amas auquel la graine g est rattachée. De cette façon, il est possible de différencier une variable x_k d'une variable $x_k' = \mu_k(x_k)$.

Les variables y_j, y_i, z_j, z_i et w_j sont définies comme suit :

$$y_j = \frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j} \quad (2)$$

$$y_i = \frac{M_i(g_2) + W_i(g_2)}{x_i} \quad (3)$$

$$z_j = \frac{M_j(g_3) + W_j(g_3)}{y_j} \quad (4)$$

$$z_i = \frac{M_i(g_1) + W_i(g_1)}{x_i} \quad (5)$$

$$w_j = \frac{M_j(g_5) + W_j(g_5)}{x_j}. \quad (6)$$

Introduisons maintenant des égalités que nous allons utiliser pour la démonstrations des prochains lemmes.

Les lemmes 3.8, 3.12, 3.13 et 3.14 nous permettent d'établir les relations suivantes (en tenant compte de la flèche entre i et j cette fois) :

$$M_j(g_3) = \text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot y_i \quad (7)$$

$$W_j(g_3) = \frac{M_j(g_1)}{x_i} \cdot \frac{W_i(g_1)}{x_j} \quad (8)$$

$$M_j(g_5) = \frac{M_j(g_1)}{x_i} \cdot \frac{M_i(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \quad (9)$$

$$W_j(g_5) = \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot z_i. \quad (10)$$

Les relations suivantes se trouvent de façon évidente puisqu'elles découlent d'une seule mutation :

$$M_i(g_2) = \frac{M_i(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot y_j \quad (11)$$

$$W_i(g_2) = \frac{W_i(g_1)}{x_j} \cdot \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}. \quad (12)$$

Lemme 4.13. *Soit $G = (Q, X)$ une graine et i, j deux points tels qu'il y ait une seule flèche de i vers j dans Q . Alors, si on note l'amas $\mu_j \mu_i \mu_j(X) = \{x_1, \dots, y_i, \dots, z_j, \dots, x_n\}$ et l'amas $\mu_j \mu_i(X) = \{x_1, \dots, z_i, \dots, w_j, \dots, x_n\}$, on a $y_i = w_j$.*

Démonstration. En utilisant les égalités (2), (3), (11) et (12), on peut développer le terme y_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{M_i(g_2) + W_i(g_2)}{x_i} \\ &= \frac{\frac{M_i(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot y_j + \frac{W_i(g_1)}{x_j} \cdot \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}}{x_i} \\ &= \frac{\frac{M_i(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot \left(\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j} \right) + \frac{W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}}{x_i} \\ &= \frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1) + M_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_i \cdot x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}. \end{aligned}$$

De la même façon, en utilisant les égalités (5), (6), (9) et (10), on peut développer le terme w_j ainsi :

$$\begin{aligned}
w_j &= \frac{M_j(g_5) + W_j(g_5)}{x_j} \\
&= \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1)}{x_i \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} + \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot z_i}{x_j} \\
&= \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1)}{x_i \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} + \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot \frac{M_i(g_1) + W_i(g_1)}{x_i}}{x_j} \\
&= \frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1) + M_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_i \cdot x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}.
\end{aligned}$$

Comme les deux expressions sont égales, on a $y_i = w_j$. \square

Lemme 4.14. Soit $G = (Q, X)$ une graine et i, j deux points tels qu'il y ait une seule flèche de i vers j dans Q . Alors, si l'on note l'amas $\mu_j \mu_i \mu_j(X) = \{x_1, \dots, y_i, \dots, z_j, \dots, x_n\}$ et l'amas $\mu_j \mu_i(X) = \{x_1, \dots, z_i, \dots, w_j, \dots, x_n\}$, on a $z_j = z_i$.

Démonstration. En utilisant les égalités (2), (3), (4), (5), (7), (8), (11) et (12), on peut démontrer le lemme ainsi :

$$\begin{aligned}
z_j &= \frac{M_j(g_3) + W_j(g_3)}{y_j} \\
&= \frac{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot y_i + \frac{M_j(g_1)}{x_i} \cdot \frac{W_i(g_1)}{x_j}}{y_j} \\
&= \frac{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot \left(\frac{M_i(g_2) + W_i(g_2)}{x_i} \right) + \frac{M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}} \\
&= \frac{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot \left(\frac{\frac{M_i(g_1) \cdot y_j}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} + \frac{W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}}{x_i} \right) + \frac{M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}} \\
&= \frac{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot \left(\frac{\frac{M_i(g_1) \cdot (M_j(g_1) + W_j(g_1))}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot x_j} + \frac{W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}}{x_i} \right) + \frac{M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\frac{M_i(g_1) \cdot (M_j(g_1) + W_j(g_1))}{x_j} + \frac{W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_j}}{x_i} \right) + \frac{M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j} \\
= & \frac{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}} \\
= & \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot (M_j(g_1) + W_j(g_1)) + W_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}} \\
= & \frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1) + M_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + W_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot (M_j(g_1) + W_j(g_1))} \\
= & \frac{M_i(g_1) + W_j(g_1)}{x_i} \\
= & z_i.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.15. Soit $G = (Q, X)$ une graine et i, j deux points de Q tels qu'il y ait une unique flèche $i \rightarrow j$.

Alors, $\mu_j \mu_i(X) = \mu_j \mu_i \mu_j(X)$.

Démonstration. Les amas $\mu_j \mu_i \mu_j(X) = \{x_1, \dots, y_i, \dots, z_j, \dots, x_n\}$ et $\mu_j \mu_i(X) = \{x_1, \dots, z_i, \dots, w_j, \dots, x_n\}$ partagent toutes leurs variables, sauf celles associées à i et à j . Les lemmes 4.13 et 4.14 démontrent que $y_i = w_j$ et que $z_j = z_i$. Ainsi, les deux amas ont exactement les mêmes éléments et sont donc égaux. □

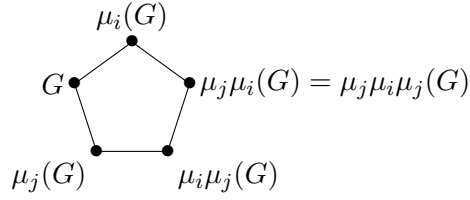
Théorème 4.16. Soit $G = (Q, X)$ une graine et i, j deux points de Q tels qu'il y ait une unique flèche $i \rightarrow j$. Alors $\mu_j \mu_i(G) = \mu_j \mu_i \mu_j(G)$

Démonstration. Avec le théorème 3.2 nous savons que les carquois $\mu_j \mu_i(Q)$ et $\mu_j \mu_i \mu_j(Q)$ sont isomorphes et avec la proposition 4.15 nous avons que les amas $\mu_j \mu_i(X)$ et $\mu_j \mu_i \mu_j(X)$ sont les mêmes. Ainsi, les graines $\mu_j \mu_i(G)$ et $\mu_j \mu_i \mu_j(G)$ sont les mêmes, puisqu'elles ont le même carquois et le même amas. On remarque aussi que dans l'isomorphisme des carquois les points i et j sont permutés et qu'on retrouve le même phénomène pour les variables reliées à i et à j pour les amas. □

Le théorème qui suit énonce l'application du théorème 4.16 aux graphes d'échange.

Théorème 4.17. Soit $G = (Q, X)$ une graine et i, j deux points de Q tel qu'il y ait une unique flèche $i \rightarrow j$.

Les points associés aux graines $G, \mu_i(G), \mu_j(G), \mu_j \mu_i(G) = \mu_j \mu_i \mu_j(G)$ et $\mu_i \mu_j(G)$ forment un pentagone, qui correspond à un sous-graphe plein du graphe d'échange, comme suit :



Démonstration. Pour qu'un tel pentagone se retrouve dans le graphe d'échange, il faut que les cinq points soient associés à cinq amas différents.

Voici toutes les paires de graines possibles pour lesquelles nous devons vérifier si leur amas sont distincts :

- G et $\mu_j(G)$
- G et $\mu_i(G)$
- G et $\mu_i\mu_j(G)$
- G et $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_j(G)$ et $\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_j(G)$ et $\mu_i(G)$
- $\mu_j(G)$ et $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_i(G)$ et $\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_i(G)$ et $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_i\mu_j(G)$ et $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$.

Les paires de graines suivantes ne peuvent avoir le même amas puisqu'elles sont reliées par une seule mutation (voir la démonstration pour le quadrilatère) :

- G et $\mu_j(G)$
- G et $\mu_i(G)$
- $\mu_i(G)$ et $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_i\mu_j(G)$ et $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_j(G)$ et $\mu_i\mu_j(G)$.

De plus, les paires suivantes ne peuvent avoir le même amas puisque si c'était le cas, au moins un autre amas contiendrait 2 variables amassées identiques (voir la démonstration pour le quadrilatère) :

- G et $\mu_i\mu_j(G)$
- G et $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_j(G)$ et $\mu_i(G)$.

Il reste alors 2 paires de graines à vérifier. Commençons par $\mu_i(G)$ et $\mu_i\mu_j(G)$.

Remarque 4.18. Il est important de mentionner que comme il y a une flèche entre i et j , la mutation μ_i donnera des variables différentes en fonction de l'amas sur lequel on mute. Par exemple, la nouvelle variable obtenue lors de $\mu_i(G)$ n'est pas la même que celle obtenue lors de $\mu_i\mu_j(G)$.

Supposons que $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ et $i \neq j$. Alors, on a que $\mu_i(X) = \{x_1, \dots, x_i', \dots, x_j, \dots, x_n\}$ et $\mu_i\mu_j(X) = \{x_1, \dots, x_i'', \dots, x_j', \dots, x_n\}$. Pour que ces amas soient égaux, il faut soit que $x_i' = x_i''$ et $x_j = x_j'$, soit que $x_i' = x_j'$ et que $x_j = x_i''$. Or, $x_j \neq x_j'$, alors le premier cas est impossible.

Supposons que $x_i' = x_j'$. Alors, l'amas $\mu_j(X)$ contient les variables x_i et $x_j' = x_i'$. Or, il est impossible qu'un amas contienne ces deux variables en même temps si celui-ci n'a subi qu'une seule mutation au point j . En effet, cela voudrait dire que $x_i' = \mu_j(x_i) = \mu_i(x_i)$ et donc que $j = i$. Il y a donc une contradiction.

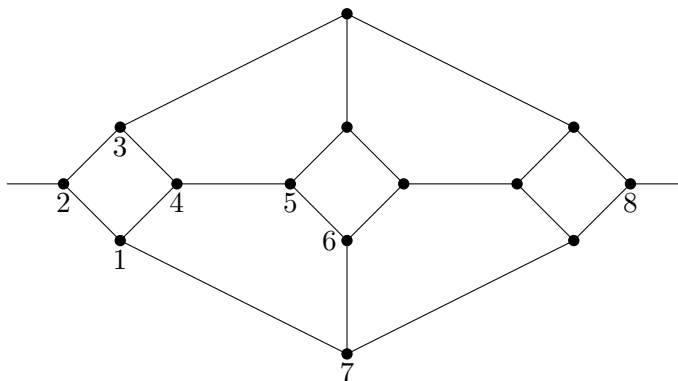
De façon analogue, on trouve que $\mu_j(G)$ et $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$ ne peuvent pas être le même amas.

Ainsi, les cinq amas sont bien distincts dans le graphe d'échange et forment un pentagone.

□

4.4 Exemple

Dans cet exemple, prenons la graine $G = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$. Alors, le graphe d'échange de G est :



Ce graphe d'échange est un polyèdre de \mathbb{R}^3 , voir [BDP12]. Il y a donc identification entre le segment quittant le sommet 2 vers la gauche et celui quittant le sommet 8 vers la droite.

On peut voir que dans ce graphe d'échange, il y a des quadrilatères et des pentagones. Ainsi, le point 1 du graphe est relié à une graine telle que son carquois n'a pas de flèches entre deux points a et b , ce qui donne un quadrilatère, formé des points 1, 2, 3 et 4, lorsqu'on mute sur ces deux points, et a une unique flèche entre deux points b et c , ce qui donne un pentagone, formé des points 1, 4, 5, 6 et 7, lorsque l'on mute sur ces deux points.

Références

- [BDP12] T. BRÜSTLE, G. DUPONT et M. PÉROTIN : On Maximal Green Sequences. *ArXiv e-prints*, mai 2012.

- [FZ01] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras I : Foundations. *ArXiv Mathematics e-prints*, avril 2001.
- [GSV07] M. GEKHTMAN, M. SHAPIRO et A. VAINSHTEIN : On the properties of the exchange graph of a cluster algebra. *ArXiv Mathematics e-prints*, mars 2007.

CATHERINE MASSON
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: `catherine.masson@USherbrooke.ca`

JEAN-PHILIPPE MORISSETTE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: `jean-philippe.morissette@USherbrooke.ca`

Sur le diamètre du graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n

Yannick Lebrun

RÉSUMÉ Le calcul du diamètre du graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n constitue un problème intéressant des mathématiques. De un, nous pouvons le transposer en géométrie grâce aux triangulations de surfaces. De deux, la preuve récente de Ceballos et Pilaud que ce diamètre vaut $2n - 2$ lorsque $n \geq 2$ est d'une simplicité remarquable. Dans cet article, nous en présentons une version retravaillée qui utilise un support géométrique mieux connu et qui met l'accent sur la rigueur et les intuitions derrière les idées principales. Tout d'abord, nous définissons les triangulations étiquetées du n -gone à une ponction. Ensuite, nous fournissons les arguments permettant de les lier à D_n . Finalement, nous démontrons le résultat de Ceballos et Pilaud par l'intermédiaire de ces triangulations. Au passage, nous introduisons la notion de niveau qui modélise la structure du graphe d'échange de D_n .

1 Introduction

Les algèbres amassées, depuis leur introduction dans [FZ02], jouissent d'une reconnaissance et de développements importants. Leur notoriété vient du fait que nous les retrouvons dans plusieurs branches des mathématiques et même en physique. Sommairement, ce type d'algèbre est généré par des variables dites amassées qui sont regroupées en ensembles de même cardinalité appelés amas. Pour obtenir ces variables, nous considérons tout d'abord une graine (initiale) qui est une paire formée d'une matrice et d'un amas. Ensuite, nous lui appliquons des mutations dans toutes les directions possibles. Ces opérations créent de nouvelles graines et donc de nouvelles variables amassées qui contribuent à générer l'algèbre. Si nous répétons infiniment ce processus, nous obtenons un ensemble potentiellement infini de graines liées par des mutations. Ces liens sont encodés dans un graphe dit d'échange où les sommets correspondent aux graines et les arêtes, aux mutations.

Cet article est la conclusion d'un stage de recherche mené à l'Université de Sherbrooke lors de l'été 2013. Son financement provient d'une bourse du CRSNG jumelée d'une contribution de Virginie Charette. Je remercie cette personne et Thomas Brüstle, tous deux professeurs au département de mathématiques de l'université, pour avoir supervisé mes recherches et commenté mes premiers écrits dont le présent article s'inspire. Je remercie également mes anciens collègues Jean-François Marceau et Guillaume Douville pour leur aide et les discussions que nous avons partagées. Finalement, je suis reconnaissant envers ma famille qui m'a appuyé aux niveaux matériel et affectif durant la rédaction. Sans elle, cet article n'existerait pas.

Nous savons grâce à [FZ03a] qu'il existe seulement quelques cas où le nombre de sommets est fini. Cela se produit lorsque les graines générées par mutation récursive se répètent toujours après un certain temps. Ces cas sont regroupés dans [FZ03a] en neuf types d'algèbres amassées qui sont qualifiées de type fini : A_n , B_n , C_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 , F_4 et G_2 . Dans le contexte d'une telle algèbre, il devient pertinent de parler du diamètre de son graphe d'échange. Cette mesure d'éloignement correspond ici au nombre minimal de mutations qu'il nous faut pour passer d'une graine quelconque à une autre. Il y a quelques années de cela, son calcul était un problème ouvert pour tous les types finis autres que G_2 .

Le diamètre associé au type A_n , le premier à avoir été « résolu », est borné supérieurement et déjà conjecturé dans [STT88]. Une démonstration de cette conjecture fut éventuellement annoncée, mais seulement en 2012 dans une version antérieure de [Pou14]. Fait intéressant, les algèbres amassées ne sont pas mentionnées dans les deux articles et n'auraient pu l'être en 1988. Le problème étudié dans ces derniers concerne plutôt les triangulations du $(n+3)$ -gone et le flip de leurs diagonales. Or, il est maintenant connu que ces triangulations et les flips qui les relient sont une représentation géométrique des graines de A_n et des mutations qui les relient. En plus de souligner la polyvalence des algèbres amassées, cette représentation nous permet de mieux visualiser la structure du graphe d'échange de A_n . Ainsi, elle facilite le calcul de son diamètre.

Quant à D_n , le type qui nous intéresse, le diamètre de son graphe a été récemment évalué dans [CP14] à $2n-2$ lorsque $n \geq 2$. Les auteurs de ce résultat ont eux aussi travaillé dans un cadre géométrique plutôt qu'algébrique. Entre autres, ils ont introduit les pseudo-triangulations d'une configuration \mathbb{D}_n qui sont équivalentes aux graines de D_n . Leur introduction, toutefois, n'était pas nécessaire, car elles ne sont pas les seules avec cette propriété. Par exemple, nous disposons des triangulations étiquetées définies dans [FST08] qui correspondent aussi à D_n lorsqu'elles sont appliquées au n -gone à une ponction, noté ici \mathbf{P}_n^\bullet . Ces triangulations étant connues depuis quelques années et plus répandues, nous jugeons pertinent de reprendre la démarche présentée dans [CP14] avec \mathbf{P}_n^\bullet . Nous profitons aussi de cette occasion pour la retravailler et ainsi lui donner une progression plus intuitive et rigoureuse qui complimente sa simplicité.

Tout d'abord, à la section 2, nous décrivons les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet suivies du flip d'arc étiqueté. Ensuite, à la section 3, nous présentons simplement le graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n et établissons son équivalence avec \mathbf{P}_n^\bullet . Finalement, à la section 4, nous définissons proprement le problème du diamètre et en suggérons une solution inspirée de [CP14]. La première partie de cette solution se penche sur la notion de niveau qui rejoint notre besoin de connaître la structure du graphe d'échange. La seconde partie, quant à elle, se concentre sur la preuve proprement dite.

Nous n'assumons du lecteur aucune familiarité avec les algèbres amassées ou la topologie. Cependant, le contraire est souhaitable afin d'avoir une compréhension plus juste de certains passages. En ce qui concerne les algèbres amassées, la section 2 de [Bou12] suffit. Pour ce qui est de la topologie, nous recommandons la section 2.1 de [Dou12].

2 Triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet

Les triangulations, à savoir les décompositions en triangles, sont un outil essentiel dans la classification des surfaces topologiques. Dans cet article, nous nous intéressons plutôt à la combinatoire issue de leur structure. Plus spécifiquement, la combinatoire qui nous intéresse est celle générée par les triangulations dites étiquetées de [FST08] sur une surface particulière notée \mathbf{P}_n^\bullet .

Aux sections 2.1, 2.2 et 2.3, nous introduisons successivement la surface \mathbf{P}_n^\bullet , les arcs étiquetés qu'elle admet et les règles de compatibilité qui régissent leur combinaison. Une fois cela terminé, nous présentons à la section 2.4 les triangulations étiquetées (de \mathbf{P}_n^\bullet) proprement dites et quelques-unes de leurs caractéristiques. La section 2.5, quant à elle, discute de l'opération du flip qui génère la combinatoire voulue. Par souci de simplicité, plusieurs définitions et résultats de cette section sont restreints au cas \mathbf{P}_n^\bullet . Pour une présentation générale des triangulations étiquetées, le lecteur est référé aux sections 2 et 7 de [FST08].

2.1 La surface \mathbf{P}_n^\bullet

La surface notée \mathbf{P}_n^\bullet , ou alternativement, $(\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$, est le n -gone à une ponction. Celui-ci est un exemple de ce que nous appelons une surface marquée.

Définition 2.1. Une *surface marquée* est une paire (\mathbf{S}, \mathbf{M}) où \mathbf{S} est une surface (soumise à quelques restrictions¹) et \mathbf{M} un ensemble de points distincts dans \mathbf{S} appelés *points marqués*.

Nous n'avons pas à identifier précisément les ensembles \mathbf{S} et \mathbf{M} , car (\mathbf{S}, \mathbf{M}) est définie à homéomorphisme près. Autrement dit, elle est équivalente à toute surface marquée qui lui est homéomorphe. Nous rappelons qu'un *homéomorphisme* est une bijection continue d'inverse continu entre deux espaces topologiques (incluant les surfaces). Cela implique aussi que \mathbf{S} , qui inclut \mathbf{M} , peut être déformée et ce « dans une certaine mesure ».

La surface \mathbf{S}_p associée à \mathbf{P}_n^\bullet est un *disque*. Par exemple, l'ensemble de points

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

correspond à un disque de rayon $r \in]0, \infty[$ dans le plan. En topologie, nous disons que la partie $x^2 + y^2 = r^2$ est la *frontière* $\partial\mathbf{S}_p$ de \mathbf{S}_p tandis que la partie $x^2 + y^2 < r^2$ est l'*intérieur* $\text{int}(\mathbf{S}_p)$ de \mathbf{S}_p . L'ensemble \mathbf{M}_p , quant à lui, contient $n + 1$ points distincts. Parmi ceux-ci, n se situent sur la frontière du disque alors que le dernier point se situe dans son intérieur et porte un nom particulier.

Définition 2.2. Soit (\mathbf{S}, \mathbf{M}) une surface marquée. Un point marqué de \mathbf{M} dans l'intérieur $\text{int}(\mathbf{S})$ de \mathbf{S} s'appelle une *ponction*.

Définition 2.3. Soit $n \geq 1$ un entier. Un *n -gone à une ponction* $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ est, à homéomorphisme près, un disque avec n points marqués sur sa frontière et une ponction.

¹La définition 2.1 de [FST08] demande que \mathbf{S} soit une surface de Riemann de dimension deux qui est de plus connexe, orientable et à bord.

Notons que le cas $n = 1$ n'est pas considéré par [FST08] comme lieu pour les triangulations ; nous reviendrons là-dessus à la section 2.4. La définition de \mathbf{P}_1^\bullet est toutefois donnée puisque ce dernier est utile pour présenter les arcs étiquetés.

Comme \mathbf{P}_n^\bullet est défini à homéomorphisme près, nous pouvons modifier son apparence discoïde. En fait, il nous est possible de choisir n'importe quelle surface marquée à la condition qu'elle possède les mêmes propriétés topologiques². Ainsi, si $n \geq 3$, nous préférons, pour les figures, utiliser un n -gone régulier (avec ponction) plutôt qu'un disque. À la figure 1, nous illustrons les cas $n = 3$ et $n = 4$ qui sont associés au triangle équilatéral et au carré. Naturellement, cette transformation est impossible lorsque $n < 3$. Dans ce cas, nous devons garder les frontières courbées. Le terme *monogone* désigne dorénavant un 1-gone et le terme *digone*, un 2-gone. Ces deux derniers sont aussi illustrés à la figure 1.

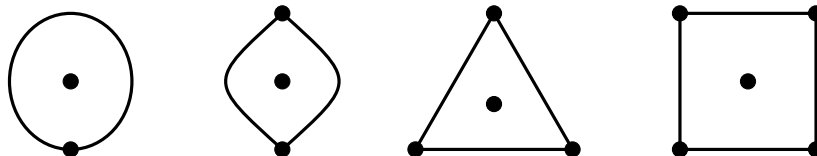


FIGURE 1 – Exemples de n -gones à une ponction \mathbf{P}_n^\bullet lorsque $1 \leq n \leq 4$. L'apparence de la frontière est personnalisable.

2.2 Les arcs

Notre objectif est de diviser \mathbf{P}_n^\bullet en « triangles étiquetés » dont les sommets sont des points marqués. Par conséquent, nous avons besoin d'arcs (étiquetés) qui relient les points de \mathbf{M}_p afin de former ces triangles. Avant de définir les arcs étiquetés, nous devons passer par la notion d'arc simple ou non étiqueté.

Définition 2.4. Un *arc simple* dans $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ est l'image $y([0, 1])$ d'une fonction continue $y : [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_p$ où $y([0, 1])$ satisfait les conditions suivantes :

- Elle ne s'auto-intersecte pas : pour tous $a, b \in [0, 1]$ distincts, $y(a) \neq y(b)$;
- Ses extrémités sont des points marqués (distincts) : $y(0), y(1) \in \mathbf{M}_p$;
- À l'exception de ses extrémités, elle est disjointe de la frontière de \mathbf{S}_p et ne touche à aucun point marqué : $y(]0, 1[) \subset \text{int}(\mathbf{S}_p) \setminus \mathbf{M}_p$;
- Elle ne délimite pas de monogone avec ou sans ponction dans \mathbf{P}_n^\bullet ni ne délimite de digone sans ponction dans celui-ci.

Un arc étiqueté est, comme son nom le suggère, un arc avec des étiquettes. Plus précisément, ce sont ses deux *bouts* que nous étiquetons. Les bouts d'un

²Dans notre cas, ces propriétés sont un genre nul, la présence d'une seule ponction et celle d'une seule frontière avec n points marqués. Le genre d'une surface fait l'objet de la définition 2.10 de [Dou12].

arc sont un concept intuitif et non formel. Nous les obtenons en coupant arbitrairement l'arc en trois portions, puis en éliminant celle du milieu. En d'autres mots, ils correspondent à des portions d'arc qui voisinent les extrémités.

Définition 2.5. Un *arc étiqueté* dans $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ est un arc simple dont chaque bout est étiqueté d'une de deux façons, « plain » ou « notched », suivant la restriction qu'un bout qui voisine la frontière de \mathbf{S}_p est étiqueté « plain ».

Une étiquette qui voisine la ponction, elle, peut être « plain » ou « notched ». Par convention, un bout étiqueté « plain » n'a pas de symbole tandis qu'un bout étiqueté « notched » est identifié par un nœud papillon \bowtie . Afin d'illustrer cela, nous avons dessiné à la figure 2 toutes les possibilités d'étiquetage d'un arc étiqueté. Notons qu'à partir de maintenant, le terme « arc » désigne par défaut « arc étiqueté » afin d'alléger le texte. De plus, lorsque nous parlerons de la *version non étiquetée* d'un arc étiqueté, nous référerons à l'arc (simple) non étiqueté de même forme.



FIGURE 2 – Les quatre possibilités d'étiquetage d'un arc si nous ignorons la restriction de la définition 2.5. Nous ajoutons le nœud papillon \bowtie proche d'un point pour signaler que le bout qui le voisine est étiqueté « notched ». Si ce symbole est absent, alors le bout est étiqueté « plain ».

En ce moment, nous pouvons discerner une infinité d'arcs, car ceux-ci, en vertu de leur définition, admettent des formes variées. Or, beaucoup d'entre eux reviennent au même pour diviser \mathbf{P}_n^\bullet . C'est pourquoi nous allons plutôt regrouper les arcs en classes d'équivalence spécifiques appelées *classes d'isotopie*.

Définition 2.6. Deux arcs étiquetés $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_p$ et $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_p$ dans $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ sont *équivalents* ou *appartiennent à la même classe d'isotopie* si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Il existe une fonction continue $i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_p$ où $i(0, t) = \gamma(t)$, $i(1, t) = \rho(t)$ et pour tout $s \in]0, 1[$, $i(s, t) = \alpha(t)$ est un arc dans \mathbf{P}_n^\bullet . En particulier, γ et ρ relient les mêmes points marqués ;
- Leurs étiquettes aux points marqués sont identiques.

Si nous enlevons la seconde condition, nous obtenons la définition de classe d'isotopie pour les arcs simples ou non étiquetés.

Le paramètre s joue ici le rôle d'un curseur : ses valeurs correspondent aux états transitoires d'une déformation liant γ et ρ . Concrètement, nous pouvons imaginer les arcs comme étant des élastiques sur un plan. Les points marqués,

eux, s'associent à des punaises qui maintiennent les extrémités des élastiques en place et qui agissent comme obstacles. Selon cette interprétation, deux élastiques sont équivalents si et seulement si nous pouvons déformer l'un en l'autre. Entre autres, il est impossible de les faire passer par-dessus une punaise. Sinon, l'image $i(s,]0, 1[)$, qui inclurait un point marqué pour un $s \in]0, 1[$ donné, ne serait plus disjointe de \mathbf{M}_p .

D'ici la fin de l'article, nous ne considérons plus les arcs en tant que courbes individuelles, mais plutôt en tant que classes d'isotopie. Toutefois, nous maintenons l'utilisation du terme « arc » qui désigne maintenant une classe identifiée par le représentant choisi. Grâce à ce regroupement, nous sommes en mesure d'énumérer tous les types d'arcs pouvant apparaître dans \mathbf{P}_n^\bullet .

Remarque 2.7. Tout arc étiqueté γ dans \mathbf{P}_n^\bullet appartient à l'un et seulement un des trois *types* suivants :

Type I : L'arc γ relie deux points marqués distincts M et N sur la frontière et ses deux étiquettes sont « plain » ;

Type II : L'arc γ relie la ponction O à un point marqué M sur la frontière et ses deux étiquettes sont « plain » ;

Type III : L'arc γ relie la ponction O à un point marqué M sur la frontière, son étiquette voisinant M est « plain » et celle voisinant O est « notched ».

De plus, si γ est un arc de type II ou III, alors il est uniquement déterminé par M . Sinon, si γ est de type I, il est uniquement déterminé par la paire $\{M, N\}$ si et seulement si ces points sont adjacents sur la frontière. Dans le cas contraire, $\{M, N\}$ identifie deux arcs qui passent de chaque côté de la ponction.

Entre autres, cette remarque implique que le nombre d'arcs dans \mathbf{P}_n^\bullet est fini et ce peu importe n . Ce nombre est égal à 2 si $n = 1$ et à n^2 si $n \geq 2$. Nous laissons la démonstration, relativement facile, de ce résultat au lecteur. À titre d'exemple, nous avons illustré les 16 arcs étiquetés de \mathbf{P}_4^\bullet à la figure 3.

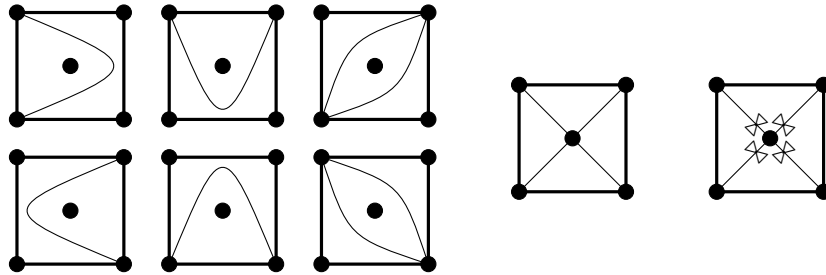


FIGURE 3 – Représentants des 16 arcs étiquetés admis dans le 4-gone (carré) à une ponction \mathbf{P}_4^\bullet . Les six carrés à gauche contiennent les 8 arcs de type I, celui du centre, les 4 arcs de type II et celui à droite, les 4 arcs de type III.

2.3 La compatibilité des arcs

Afin de diviser complètement $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ en « triangles étiquetés » à sommets dans \mathbf{M}_p , plus d'un arc est nécessaire. Cependant, certains arcs ne peuvent être utilisés simultanément parce qu'ils sont incompatibles. Par exemple, nous ne devons pas considérer deux arcs qui se coupent, car leur intersection génère un sommet qui n'est pas un point marqué. Notons que puisque nous travaillons avec des classes d'isotopie, il faut être prudent lorsque nous parlons d'intersection et plus généralement, de compatibilité. De nouveau, nous commençons par les arcs simples ou non étiquetés.

Définition 2.8. Deux arcs simples y et p dans $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ sont dits *compatibles* si et seulement s'il existe des représentants y' et p' dans leur classe d'isotopie respective qui ne s'intersectent pas dans $\text{int}(\mathbf{S}_p)$. Sinon, ils sont dits *incompatibles*.

De façon équivalente, nous pouvons plutôt exiger que y' et p' ci-haut ne s'intersectent pas en dehors de \mathbf{M}_p . Entre autres, un arc simple est compatible avec lui-même, car il est toujours possible d'identifier deux représentants de sa classe qui satisfont cette condition. Toutefois, la compatibilité n'est pas transitive. Plus précisément, si deux arcs simples x et y sont compatibles et si cela vaut aussi pour y et un autre arc simple z , alors il arrive que x et z ne le soient pas.

Naturellement, la notion de compatibilité pour les arcs étiquetés ne fait pas seulement intervenir leur forme, mais aussi leurs étiquettes. Sa définition de base, qui est applicable aux surfaces marquées autres que \mathbf{P}_n^\bullet , est la suivante :

Définition 2.9. Deux arcs étiquetés γ et ρ dans \mathbf{P}_n^\bullet avec version non étiquetée respective y et p sont dits *compatibles* si et seulement si les conditions ci-dessous sont satisfaites :

- Les arcs y et p sont compatibles au sens de la définition 2.8 ;
- Si y et p ne sont pas équivalents et partagent un point marqué M , alors l'étiquette de γ et celle de ρ qui voient M sont identiques ;
- Si y et p sont équivalents, alors au moins un bout de γ est étiqueté de la même manière que le bout correspondant de ρ .

Sinon, γ et ρ sont dits *incompatibles*.

La compatibilité des arcs étiquetés est également réflexive, mais pas transitive. Afin de clarifier cette nouvelle notion, nous avons illustré les 9 arcs étiquetés de \mathbf{P}_3^\bullet et leurs liens de compatibilité à la figure 4.

Puisque nous nous limitons à une seule surface, nous pouvons traduire la définition précédente en règles de compatibilité spécifiques aux arcs de \mathbf{P}_n^\bullet . En considérant de plus les trois types identifiés à la remarque 2.7, nous obtenons les règles ci-dessous :

Remarque 2.10. Soient γ et ρ deux arcs étiquetés dans \mathbf{P}_n^\bullet et y et p leur version non étiquetée respective.

- Si γ ou ρ est de type I, alors γ et ρ sont compatibles si et seulement si y et p le sont.
- Si γ est de type II et ρ de type III ou vice versa, alors γ et ρ sont compatibles si et seulement si y et p sont équivalents.
- Si γ et ρ sont tous deux de type II ou tous deux de type III, alors ils sont compatibles.

La justification derrière cette remarque est la suivante. En premier lieu, si γ ou ρ est de type I, alors les points marqués qu'ils peuvent partager se situent sur la frontière de \mathbf{P}_n^\bullet . Comme nous le savons, celle-ci force les bouts qui la voisinent à être étiquetés « plain ». Ainsi, les étiquettes de γ et de ρ à leurs extrémités communes, s'il y en a, correspondent et seule la première condition de la définition 2.9 est à vérifier. En second lieu, les arcs des types II et III, par eux-mêmes, ne font pas intervenir les intersections, car elles sont toujours évitables. Par conséquent, leur compatibilité suit plutôt de la deuxième et troisième condition de la définition 2.9.

2.4 Les triangulations étiquetées

Nous avons établi que la compatibilité des arcs étiquetés n'est pas transitive. Or, la possibilité de trouver plus de deux arcs qui sont compatibles entre eux est réelle. En fait, ce sont les regroupements de tels arcs qui, sous une condition supplémentaire de maximalité, forment les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet .

Plus précisément, les arcs d'une collection C sont dits *compatibles deux à deux* si pour toute paire $\{\gamma, \rho\} \subset C$, γ et ρ sont compatibles. Lorsqu'il est impossible d'ajouter un arc quelconque μ à C , c'est-à-dire que μ est incompatible avec au moins un arc de C , nous disons que la collection est *maximale*.

Définition 2.11. Soit $n \geq 2$. Une collection maximale d'arcs étiquetés compatibles deux à deux dans \mathbf{P}_n^\bullet se nomme une *triangulation étiquetée* de \mathbf{P}_n^\bullet .

Afin d'alléger davantage le texte et lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion, nous omettrons le qualificatif « étiquetée ».

Avant de commencer l'étude des triangulations, mentionnons que l'exclusion ci-haut du cas $n = 1$ est justifiée. De un, elle est en accord avec la définition 2.1 de [FST08]. La raison donnée par ses auteurs est que le monogone à une ponction \mathbf{P}_1^\bullet n'admet qu'une seule triangulation. Cette dernière ne correspond pas à notre définition 2.11 et implique plutôt une variante de nos arcs simples. Cependant, cette raison vaut aussi pour nos arcs étiquetés puisqu'un arc de type II et un de type III sont nécessaires et suffisent pour « trianguler » \mathbf{P}_1^\bullet . De deux, plusieurs résultats et définitions ne s'appliqueront (clairement) pas lorsque $n = 1$. Entre autres, le flip d'arc n'est pas défini dans \mathbf{P}_1^\bullet et cela nous empêche de conclure une équivalence entre le monogone et l'algèbre amassée de type D_1 . Nous donnons davantage de précisions sur ce sujet à la section 3.

Malgré son appellation, une triangulation étiquetée ne divise pas toujours \mathbf{P}_n^\bullet en triangles. Parfois, une région délimitée par des arcs correspond davantage à un

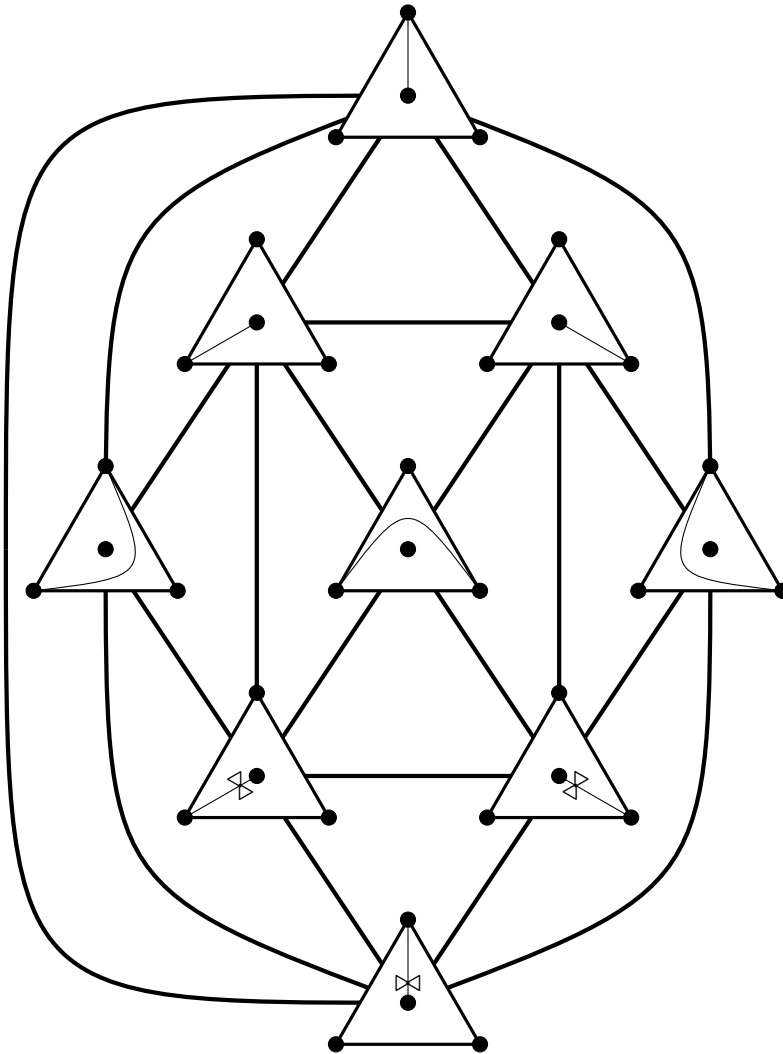


FIGURE 4 – Graphe de compatibilité des 9 arcs étiquetés admis dans le 3-gone (triangle) à une ponction \mathbf{P}_3^\bullet . Chaque triangle contient un arc parmi les 9 et deux triangles sont liés par une arête si et seulement si leurs arcs sont compatibles. L'absence de transitivité parfaite est mise en évidence ici. Nous avons omis les arêtes bouclées qui représentent la nature réflexive de la compatibilité.

digone³ ou un quadrilatère. Cela se produit dans un cas particulier : lorsque deux arcs étiquetés γ et ρ de type II et III respectivement sont conjointement utilisés. Rappelons que dans ce cas, γ et ρ sont deux courbes reliant la ponction au même point marqué sur la frontière. Toutefois, l'usage du terme « triangulation » persiste par analogie aux triangulations standards qui, à la base, sont aussi des collections maximales (d'arcs « normaux »).

Lorsque nous obtenons bien des triangles, ceux-ci ne rejoignent pas toujours leur définition classique en géométrie euclidienne. De un, il arrive que leurs côtés, en étant des arcs ou une partie de la frontière de \mathbf{P}_n^\bullet , soient courbés. De deux, les angles intérieurs peuvent dépasser 90 degrés et deux triangles adjacents ne sont pas limités au partage d'un seul côté. Les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_2^\bullet et \mathbf{P}_3^\bullet , que nous présentons aux figures 5 et 6 respectivement, illustrent bien ces situations. Les arêtes reliant les triangulations dans ces figures ont un sens dont la description est reportée à la section 2.5. Bref, un triangle doit être vu ici comme une région délimitée par trois points et trois courbes. À homéomorphisme près, elle correspond à un disque avec trois points sur sa frontière.

Dans [FST08], il est démontré que le nombre d'arcs composant une triangulation étiquetée (d'une surface marquée générale) est invariant par rapport à la surface. Pour \mathbf{P}_n^\bullet spécifiquement, ce résultat prend la forme suivante :

Théorème 2.12 (Théorème 7.9 de [FST08], première partie). *Si $n \geq 2$, alors toute triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet est composée de n arcs étiquetés.* \square

L'invariant n est appelé le *rang* de \mathbf{P}_n^\bullet . Cette terminologie vient du fait que le type d'algèbre amassée associé à cette surface, D_n , est de rang n . La section 3 contient plus de détails à ce sujet.

2.5 Le flip d'arc étiqueté

En essence, l'opération du flip consiste à transformer une triangulation étiquetée en une autre par un changement local sur sa configuration d'arcs. Elle permet ainsi de lier les triangulations de \mathbf{P}_n^\bullet et de créer une combinatoire similaire à celle retrouvée dans les algèbres amassées. Notre définition du flip repose sur la seconde affirmation du théorème 7.9 de [FST08] qui est ici adaptée à \mathbf{P}_n^\bullet .

Théorème 2.13 (Théorème 7.9 de [FST08], seconde partie). *Si $n \geq 2$, alors toute collection de $n - 1$ arcs étiquetés compatibles deux à deux dans \mathbf{P}_n^\bullet est incluse dans exactement deux triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet .* \square

En vertu de cette affirmation, tout arc γ dans une triangulation quelconque T admet un unique substitut γ' compatible avec les $n - 1$ autres arcs de T . En effet, puisque T est une collection maximale d'arcs compatibles deux à deux, $T \setminus \{\gamma\}$ est une collection de $n - 1$ arcs aussi compatibles deux à deux. Ainsi, elle est incluse dans exactement deux triangulations de \mathbf{P}_n^\bullet et le choix d'un n^e

³Celui-ci est délimité par les arcs γ et ρ décrits un peu plus loin et non par un seul arc dans \mathbf{P}_n^\bullet . Il n'y a donc pas de contradiction avec la définition 2.4. De plus, notons qu'en superposant ces deux arcs, le digone disparaît. Il n'est donc pas une conséquence immédiate de leur union.

arc pour la compléter se limite à deux candidats. L'un d'eux est évidemment γ , mais l'autre, cependant, est un arc γ' qui ne lui est pas équivalent. Grâce à ce constat, nous pouvons correctement définir le flip de la manière suivante :

Définition 2.14. Le *flip* d'un arc étiqueté γ dans une triangulation étiquetée T de \mathbf{P}_n^\bullet est l'opération qui retire γ de T et qui le remplace par l'unique arc γ' différent de γ qui, avec les arcs restants, forme une nouvelle triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet notée $\mathfrak{F}_\gamma(T)$ ou T' .

Dans une triangulation, il arrive régulièrement que deux triangles adjacents ne partagent qu'un seul côté et que l'arc γ à substituer soit ce côté. Ces triangles forment un quadrilatère et γ correspond alors à l'une de ses deux diagonales. Dans ce cas, il est aisé d'identifier le substitut γ' , car il est équivalent à la seconde diagonale, soit le seul autre arc dont l'ajout triangule aussi le quadrilatère. De manière figurée, le passage de γ à γ' équivaut à tourner ou « flipper » γ d'où l'origine du nom de l'opération. Sinon, identifier γ' requiert une certaine aisance à travailler avec les arcs étiquetés qui se développe avec la pratique.

Aux figures 5 et 6, en plus d'avoir représenté toutes les triangulations de \mathbf{P}_2^\bullet et de \mathbf{P}_3^\bullet , nous les avons liées par des arêtes qui représentent les flips. La structure résultante est un graphe d'échange dont la définition formelle et les propriétés sont présentées à la section 3. Pour le moment, nous terminons la section actuelle avec une remarque plutôt évidente, mais tout de même pertinente à préciser :

Remarque 2.15. Le flip d'un arc étiqueté γ dans une triangulation étiquetée T de \mathbf{P}_n^\bullet est tel que $\mathfrak{F}_{\gamma'}(\mathfrak{F}_\gamma(T)) = T$. Autrement dit, il est son « propre inverse ».

L'expression « propre inverse » est mise entre parenthèses parce qu'elle n'est pas tout à fait exacte ici. En effet, l'inverse $\mathfrak{F}_{\gamma'}$ n'utilise pas γ , mais bien γ' . Toutefois, nous pouvons indiquer les n arcs de T avec les naturels de 1 à n . Si l'arc d'indice k est flippé, alors son substitut hérite de l'identifiant numérique. Cette opération peut être notée \mathfrak{F}_k sans risque de confusion. Dans ce contexte, nous avons bien que $\mathfrak{F}_k(\mathfrak{F}_k(T)) = T$, soit que le flip est son propre inverse. Le terme « *involutif* » permet aussi de qualifier ce type d'opération.

3 Graphes d'échange et isomorphisme

Les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet ne sont pas liées à l'algèbre amassée de type D_n en soi, mais plutôt à la combinatoire derrière ses graines qui est décrite par son graphe d'échange. Dans cette section, nous présentons plus en détail le graphe (d'échange) associé à D_n et à \mathbf{P}_n^\bullet respectivement et établissons qu'ils sont isomorphes. Le lecteur initié aux algèbres amassées ou familier avec la matière de la section 2 de [Bou12] peut passer directement à la définition 3.1. Sinon, le prochain paragraphe en explique brièvement les fondements, mais à un niveau suffisant pour que le théorème 3.4 paraisse sensé et que les idées qui lui sont rattachées soient compréhensibles.

Soit $n \geq 1$ un entier. Une *graine* d'une *algèbre amassée de rang n* est une paire $G = (X, B)$ où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble ou *amas* de n variables

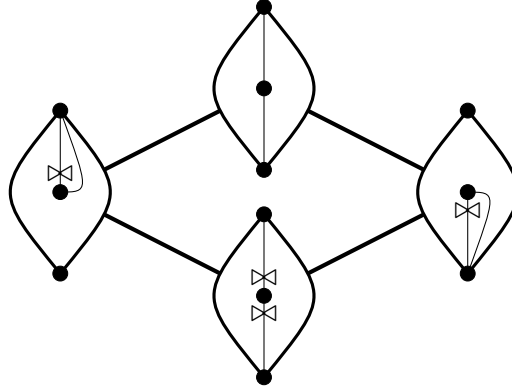


FIGURE 5 – Les 4 triangulations étiquetées du digone à une ponction \mathbf{P}_2^\bullet . Seulement celles du haut et du bas divisent le digone en (deux) triangles. De plus, une paire de triangulations est liée par une arête si et seulement si l’une s’obtient de l’autre par un flip. L’arc flippé est celui qui n’est pas commun aux triangulations de la paire. Cette structure correspond au graphe d’échange $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_2)$.

amassées et B une *matrice d’échange* de dimension $n \times n$ dans \mathbb{Z} . Si l’algèbre est de type D_n , alors la matrice B , en plus d’être limitée à des formes spécifiques, est toujours antisymétrique. Ainsi, elle est associable à un graphe Q orienté sans boucles ni 2-cycles. Ces caractéristiques font de Q un *carquois*. La *mutation* μ_k dans une direction $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ est une opération qui transforme Q en un autre carquois $Q' = \mu_k(Q)$ ou $G = (X, Q)$ en une autre graine $G' = \mu_k(G) = (X', Q')$. Le carquois Q' se distingue de Q par des changements de flèches dans le voisinage du sommet d’indice k , mais il lui est identique ailleurs. Quant à l’amas X' , il contient les mêmes variables que X à l’exception de x_k qui est remplacée par une autre variable x'_k dont la forme dépend de Q et de X . La mutation est involutive, c’est-à-dire que $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$ et que $\mu_k(\mu_k(G)) = G$.

Le nombre de graines pouvant être obtenues d’une graine initiale par un processus récursif de mutation couvrant toutes les directions est potentiellement infini. Or, puisque D_n est de type fini, ce processus, dans notre cas, produit un nombre fini de graines. Les interactions entre les graines et les mutations sont encodées dans le graphe d’échange.

Définition 3.1. Le *graphe d’échange de l’algèbre amassée de type D_n* est le graphe simple $\mathbf{EG}(D_n) = (V_A, E_A)$ où⁴ :

- l’ensemble des sommets V_A est l’ensemble de toutes les graines qui sont liées, par une suite de mutations, à une graine initiale (X, Q) dont le carquois Q est de type Dynkin D_n ([Bou12], Définition 2.17)⁵ ;

⁴Le graphe $\mathbf{EG}(D_n)$ est aussi appelé *associaèdre de type D en dimension n* . En réalité, il ne correspond pas à l’associaèdre de type D même qui est un polytope, mais plutôt au graphe issu de la structure de ses sommets et de ses arêtes.

⁵Le type Dynkin D_n est noté \mathbb{D}_n dans [Bou12].

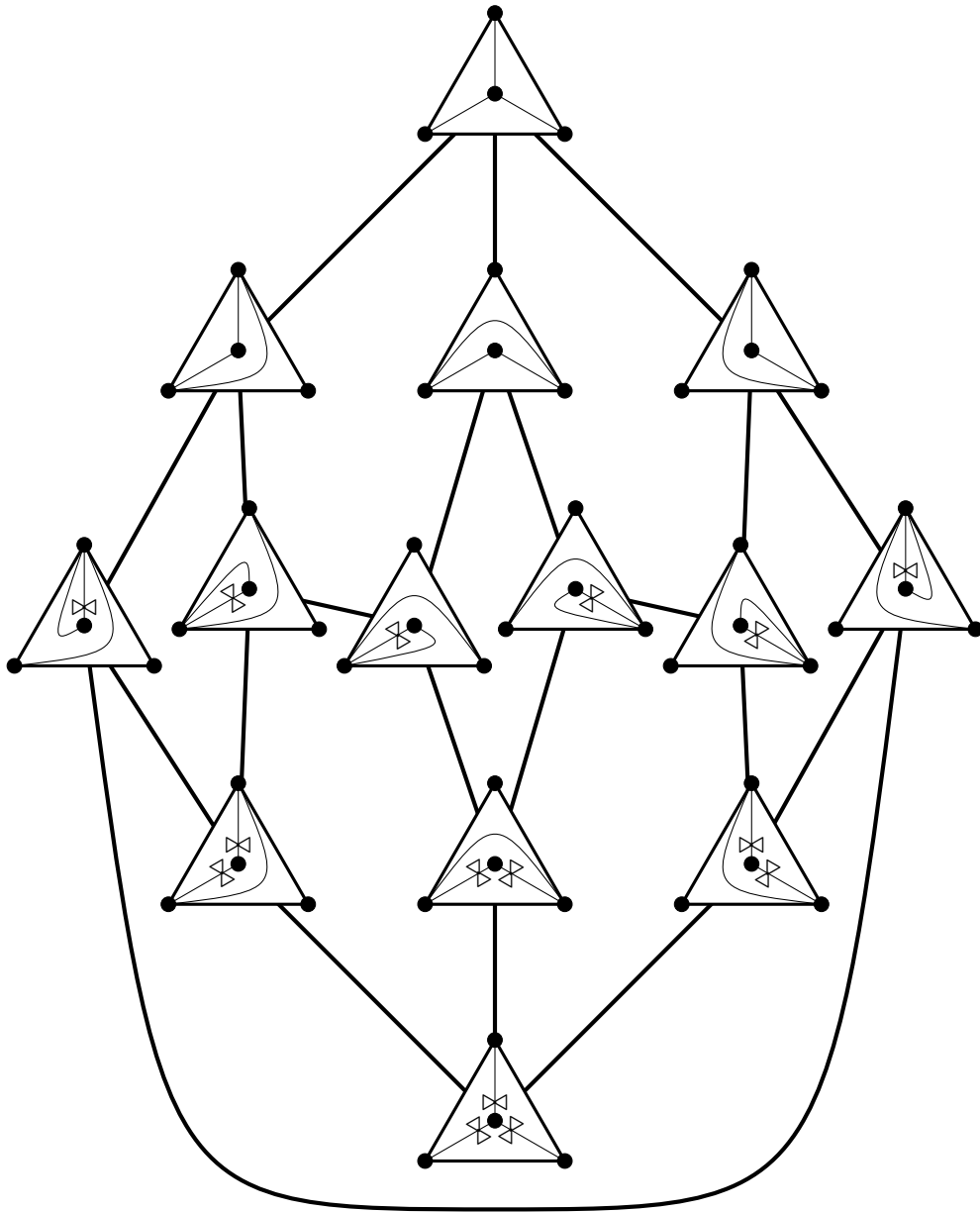


FIGURE 6 – Les 14 triangulations étiquetées du 3-gone (triangle) à une ponction \mathbf{P}_3^\bullet . À l'exception de 6 qui occupent l'équateur, elles divisent \mathbf{P}_3^\bullet en (trois) triangles. De plus, une paire de triangulations est liée par une arête si et seulement si l'une s'obtient de l'autre par un flip. L'arc flippé est celui qui n'est pas commun aux triangulations de la paire. Cette structure correspond au graphe d'échange $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_3^\bullet)$.

- l'ensemble des arêtes $E_{\mathcal{A}} \subset \{\{G_1, G_2\} \mid G_1, G_2 \in V_{\mathcal{A}}, G_1 \neq G_2\}$ est tel que $\{G_1, G_2\} \in E_{\mathcal{A}}$ si et seulement si la graine G_1 peut s'obtenir de la graine G_2 par une (seule) mutation.

Le graphe $\mathbf{EG}(D_n)$ est d'évidence fini parce que D_n est de type fini, mais il est aussi *connexe* et *régulier de degré n* . Cela signifie que toute paire de sommets est liée par une chaîne (ou une suite de mutations) et que tout sommet est incident à n arêtes (ou mutations), soit une pour chaque direction $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Quoique la définition 3.1 dépeint l'essentiel du graphe d'échange de D_n et suffit pour nos besoins, elle n'est pas tout à fait exacte. En réalité, $V_{\mathcal{A}}$ est quotienté par une relation d'équivalence qui est traitée à la section 7 de [FZ02]. Dans le cas D_n , cette relation se simplifie en vertu du théorème 1.12 de [FZ03a] et deux graines (X_1, Q_1) et (X_2, Q_2) sont équivalentes si et seulement si $X_1 = X_2$. Nous ne creusons pas davantage le sujet, cependant la notation $\mathbf{EG}(D_n)$ désignera le vrai graphe d'échange par souci de rigueur.

Nous pouvons associer aux triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet un graphe similaire à $\mathbf{EG}(D_n)$ qui encode les interactions entre les triangulations et les flips.

Définition 3.2. Soit $n \geq 2$. Le *graphe d'échange des triangulations étiquetées du n -gone à une ponction \mathbf{P}_n^\bullet* est le graphe simple $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet) = (V_{\mathcal{T}}, E_{\mathcal{T}})$ où :

- l'ensemble des sommets $V_{\mathcal{T}}$ est l'ensemble de toutes les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet ;
- l'ensemble des arêtes $E_{\mathcal{T}} \subset \{\{T_1, T_2\} \mid T_1, T_2 \in V_{\mathcal{T}}, T_1 \neq T_2\}$ est tel que $\{T_1, T_2\} \in E_{\mathcal{T}}$ si et seulement si la triangulation T_1 peut s'obtenir de la triangulation T_2 par un (seul) flip.

Les figures 5 et 6 que nous avons mentionnées précédemment sont une illustration de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_2^\bullet)$ et de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_3^\bullet)$ respectivement. Pour tout $n \geq 2$, le graphe $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ est fini, connexe et régulier de degré n tout comme $\mathbf{EG}(D_n)$. Sa finitude suit de celle du nombre d'arcs dans \mathbf{P}_n^\bullet , sa connexité, de la proposition 7.10 de [FST08], et sa n -régularité, de nos théorèmes 2.12 et 2.13.

Plus fondamentalement, les graines associées au type D_n et les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet sont analogues sur plusieurs points. Par exemple, toute graine $G \in V_{\mathcal{A}}$ contient n variables amassées et toute triangulation $T \in V_{\mathcal{T}}$ est composée de n arcs. Autre exemple : deux graines liées par une mutation se distinguent, sur le plan des amas, par une variable seulement. Pareillement, deux triangulations liées par un flip n'ont qu'un seul arc de différent. Notons aussi que la mutation et le flip sont tous deux des opérations involutives. Ces similarités demeurent si nous remplaçons D_n par une algèbre amassée de rang n quelconque. Cependant, D_n et \mathbf{P}_n^\bullet présentent des ressemblances spécifiques qui révèlent leur équivalence. Entre autres, le nombre de variables amassées observables dans les graines de $V_{\mathcal{A}}$ est égal à n^2 ([Ngu07], Proposition 2.6), soit au nombre d'arcs dans \mathbf{P}_n^\bullet lorsque $n \geq 2$. Nous allons maintenant énoncer cette équivalence, mais auparavant, nous rappelons le concept d'isomorphisme pour les graphes.

Rappel 3.3. Deux graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ où pour tous sommets v et w dans V_1 , l'arête $\{v, w\}$ est dans E_1 si et seulement si l'arête $\{f(v), f(w)\}$ est dans E_2 . Une telle fonction f est un *isomorphisme*.

En termes simples, dire que deux graphes sont isomorphes signifie qu'ils sont identiques structurellement.

Théorème 3.4. *Si $n \geq 2$, alors $\mathbf{EG}(D_n)$ et $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ sont isomorphes.*

Ce théorème n'est pas formulé explicitement dans [FST08], mais il en est une conséquence implicite. Nous n'insistons pas pour le prouver rigoureusement, car cela implique des notions qui dépassent le cadre de cet article. Toutefois, nous donnons l'information nécessaire afin que le lecteur intéressé et préférablement initié aux algèbres amassées puisse le faire.

Démonstration du théorème 3.4 (esquisse). Le résultat découle directement du théorème 7.11 de [FST08] si la surface marquée $(\mathbf{S}, \mathbf{M}) = \mathbf{P}_n^\bullet$ et l'algèbre amassée $\mathcal{A} = D_n$ satisfont deux conditions. Puisque \mathbf{P}_n^\bullet est inclus dans la définition 2.1 de [FST08] lorsque $n \geq 2$ et possède une frontière, il satisfait la première⁶.

Étant donnée T une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet , il est possible de lui associer un carquois $B(T)$ sous la forme d'une matrice antisymétrique. La procédure à suivre fait l'objet des définitions 4.1 et 9.6 de [FST08]. En lien avec celles-ci, le théorème 7.11 exige que l'ensemble des carquois $B(T)$ issus des triangulations de \mathbf{P}_n^\bullet soit égal à l'ensemble des carquois Q composant les graines de D_n . C'est la seconde condition à considérer et elle est satisfaite pour deux raisons. De un, il existe une triangulation T^* où $B(T^*)$ est un carquois de type Dynkin D_n . Un exemple de forme admissible pour T^* est dessiné dans l'image de droite à la figure 14 de [FST08]. De deux, en vertu du lemme 9.7 de [FST08], la mutation de carquois μ_k est compatible avec le flip d'arc \mathfrak{F}_γ . Concrètement, si γ est un arc d'indice k dans une triangulation T , alors $B(\mathfrak{F}_\gamma(T)) = \mu_k(B(T))$. Ces arguments suffisent pour conclure l'égalité entre les deux ensembles de carquois. \square

Grâce au théorème 3.4 (et lorsque $n \geq 2$), nous pouvons aborder les problèmes reliés au graphe d'échange de D_n du point de vue des triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet . Un de leurs avantages est qu'elles offrent une vision plus concrète et intuitive de $\mathbf{EG}(D_n)$.

4 Structure et diamètre de $\mathbf{EG}(D_n)$

Le graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n étant présenté, nous nous concentrons maintenant sur son diamètre et sur les stratégies pour le calculer. Tout d'abord (et puisque nous ne l'avons pas encore fait), nous définissons rigoureusement le diamètre d'un graphe et un concept qui lui est préalable : la distance entre deux sommets.

⁶Plus précisément, cette condition est satisfaite parce que \mathbf{P}_n^\bullet n'est pas une surface « closed ». Ce qualificatif veut dire « compacte et sans frontière ».

Définition 4.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. La *distance* entre deux sommets $v_1, v_2 \in V$ de G , notée $d(v_1, v_2)$, est la longueur d'une chaîne minimale entre v_1 et v_2 .

Dans $\mathbf{EG}(D_n) = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}})$, la distance $d(G_1, G_2)$ équivaut au nombre minimal de mutations à effectuer pour passer d'une graine $G_1 \in V_{\mathcal{A}}$ à une graine $G_2 \in V_{\mathcal{A}}$. Parallèlement, dans $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet}) = (V_{\mathcal{T}}, E_{\mathcal{T}})$, $d(T_1, T_2)$ équivaut au nombre minimal de flips à effectuer pour passer d'une triangulation $T_1 \in V_{\mathcal{T}}$ à une triangulation $T_2 \in V_{\mathcal{T}}$. Nous avons établi à la section 3 que les deux graphes d'échange sont connexes, soit que toute paire de sommets est liée par une suite de mutations ou de flips. Ainsi, les quantités $d(G_1, G_2)$ et $d(T_1, T_2)$ sont toujours définies.

Le *diamètre* d'un graphe est une mesure de l'éloignement maximal entre ses sommets. Plus précisément, il correspond à la distance maximale pouvant être observée dans le graphe. Pour $\mathbf{EG}(D_n)$ en particulier, nous disons que :

Définition 4.2. Le *diamètre du graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n* est

$$\text{diam}(D_n) = \max\{d(G_1, G_2) \mid G_1, G_2 \in V_{\mathcal{A}}\}.$$

Quoique les graphes $\mathbf{EG}(D_n)$ et $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$ ne soient pas identiques, leur structure l'est lorsque $n \geq 2$ en vertu du théorème 3.4. Entre autres, leur diamètre sont égaux et $\text{diam}(D_n)$ peut donc aussi désigner le diamètre de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$. Cette définition alternative est soulignée ci-dessous.

Définition 4.3. Si $n \geq 2$, alors $\text{diam}(D_n) = \max\{d(T_1, T_2) \mid T_1, T_2 \in V_{\mathcal{T}}\}$.

Naturellement, nous sommes confrontés au choix de favoriser l'une ou l'autre des deux définitions. Nous décidons ici de travailler avec $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$, car la structure du graphe d'échange se visualise plus facilement avec les triangulations étiquetées. Cette option n'est pas offerte si $n = 1$; toutefois, le diamètre de $\mathbf{EG}(D_1)$ se détermine sans effort. Nous revenons là-dessus au théorème 4.13.

Dans les pages qui suivent, nous présentons une solution menant au diamètre de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$ pour tout $n \geq 2$. Elle s'inspire de la section 3 de [CP14], mais s'en distingue de par son utilisation des triangulations étiquetées, son caractère plus rigoureux et son rythme, plus progressif. À la section 4.1, nous introduisons la notion de niveau dans $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$ et déduisons quelques lemmes grâce à elle. Ensuite, à la section 4.2, nous calculons le diamètre du graphe d'échange. Notez qu'à moins d'une confirmation ou d'une indication contraire, les définitions et les résultats de ces sections sont implicitement restreints au cas $n \geq 2$.

4.1 Les niveaux

Malgré l'apport visuel des triangulations étiquetées, le problème que nous avons en main demeure difficile. Sa résolution nécessite de bien connaître la structure de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$ et cette dernière dépend d'un entier $n \geq 2$. Si n est très petit, par exemple si $n = 2$ ou $n = 3$, elle peut être visualisée en dessinant le graphe comme aux figures 5 et 6. Cependant, cette stratégie devient rapidement impraticable

lorsque n augmente⁷. Ainsi, la structure de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$, et en conséquence, son diamètre, nous échappent en général. Heureusement, cette difficulté est surmontable et pour y parvenir, nous nous inspirons du cas familier $n = 3$.

La façon dont $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_3^\bullet)$ est illustré à la figure 6 est délibérée. Nous pouvons remarquer que le graphe est disposé en strates ou niveaux. Plus précisément, ces niveaux regroupent les triangulations dont le nombre et les types d'arcs incidents à la ponction sont identiques. Si deux niveaux sont adjacents, c'est-à-dire que l'un est pile au-dessus de l'autre, alors il y a des arêtes entre leurs triangulations. À l'inverse, s'ils ne le sont pas, alors il n'y a aucune arête entre elles. En somme, ces niveaux et l'information qu'ils apportent permettent d'éclaircir la structure du graphe, et donc de faciliter le calcul de son diamètre.

Les attributs que nous avons identifiés afin de faire ressortir cette architecture ne sont pas exclusifs au cas $n = 3$. Par conséquent, il est raisonnable de penser que nos observations sur $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_3^\bullet)$ se généralisent à $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ pour tout $n \geq 2$. Cette hypothèse constitue la ligne directrice de cette sous-section et sa démonstration requiert deux actions. En premier lieu, nous devons fixer les attributs qui regroupent les triangulations de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ en niveaux. Il suit du paragraphe précédent que nous avons besoin, au plus, des trois fonctions suivantes :

Définition 4.4. Soit $V_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet . Nous définissons les fonctions p , S et δ sur $V_{\mathcal{T}}$ de la manière suivante :

1. $p : V_{\mathcal{T}} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ envoie chaque triangulation $T \in V_{\mathcal{T}}$ sur l'entier $p(T)$ correspondant au nombre d'arcs de T qui sont incidents à la ponction.
2. $S : V_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{P}(\{\text{plain}, \text{notched}\})$ envoie chaque triangulation $T \in V_{\mathcal{T}}$ sur l'ensemble $S(T)$ des étiquettes observées dans T qui voisinent la ponction.
3. $\delta : V_{\mathcal{T}} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ envoie chaque triangulation $T \in V_{\mathcal{T}}$ sur sa *signature* $\delta(T)$ dont la valeur est déterminée par la règle ci-dessous :

$$\delta(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S(T) = \{\text{plain}\}; \\ -1 & \text{si } S(T) = \{\text{notched}\}; \\ 0 & \text{si } S(T) = \{\text{plain}, \text{notched}\}. \end{cases}$$

L'appellation « signature » nous vient de la définition 9.1 de [FST08] où S et δ sont présentées dans un contexte plus général. Notons de plus que la signature $\delta(T)$ d'une triangulation T est redondante par rapport à l'ensemble $S(T)$, car les deux apportent la même information. Or, $S(T)$ est préalable à $\delta(T)$ qui nous sera utile de par sa nature numérique et sa concision.

L'omission du cas $S(T) = \emptyset$ dans la définition de δ est volontaire, car cette égalité ne vaut pour aucune triangulation. De façon générale, nous pouvons réaliser que certaines combinaisons de $p(T)$, $S(T)$ et $\delta(T)$ sont impossibles. Dans une

⁷Le nombre de triangulations dans $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ est égal à $\frac{3n-2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ ([FZ03b], Proposition 3.8) et croît de manière importante. Par exemple, ce nombre est égal à 50 lorsque $n = 4$ et à 182 lorsque $n = 5$. Bref, il est fortement déconseillé de dessiner $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ lorsque $n \geq 5$.

optique de classification en niveaux comme la nôtre, il est pertinent d'énumérer celles pouvant être rencontrées.

Lemme 4.5. *Si T est une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet , alors $p(T)$, $S(T)$ et $\delta(T)$ respectent un et seulement un des trois scénarios suivants :*

- (i) $p(T) \geq 2$, $S(T) = \{\text{plain}\}$ et $\delta(T) = 1$;
- (ii) $p(T) \geq 2$, $S(T) = \{\text{notched}\}$ et $\delta(T) = -1$;
- (iii) $p(T) = 2$, $S(T) = \{\text{plain}, \text{notched}\}$ et $\delta(T) = 0$.

De plus, la ponction et les arcs étiquetés de T qui lui sont incidents sont délimités par un polygone $Q_{p(T)}^\bullet$ à $p(T)$ côtés.

Démonstration. Il est évident que ces trois scénarios sont réalisables et disjoints. Il suffit donc de valider qu'ils sont les seuls possibles. De plus, cette démarche nous permet de prouver l'existence du $p(T)$ -gone délimitant.

Validons d'abord la restriction $p(T) = 2$ dans le scénario (iii). Soit T une triangulation de \mathbf{P}_n^\bullet où $S(T) = \{\text{plain}, \text{notched}\}$. D'une part, $p(T) \geq 2$, car T est composée d'au moins un arc γ de type II et d'au moins un arc γ_{\bowtie} de type III. D'autre part, il suit du deuxième point de la remarque 2.10 que $p(T) \leq 2$. Plus précisément, les arcs γ et γ_{\bowtie} coexistent ensemble, car leur version non étiquetée sont équivalentes. Or, cette configuration entraîne l'impossibilité d'ajouter un troisième arc de type II ou III.

Ensuite, penchons-nous sur la restriction $p(T) \geq 2$ qui est générale. Soit T une triangulation quelconque de \mathbf{P}_n^\bullet . Il existe, dans cette surface, un k -gone à une ponction Q_k^\bullet minimal pour $k \leq n$ et borné par la frontière de \mathbf{P}_n^\bullet ou par des arcs de type I appartenant à T . Pour l'identifier, nous retirons les $p(T)$ arcs de type II ou III dans \mathbf{P}_n^\bullet et Q_k^\bullet correspond alors au plus petit polygone à contenir la ponction. Dû à sa minimalité, il ne délimite aucun arc de type I. En revanche, il délimite les $p(T)$ arcs incidents à la ponction. Puisque T forme une triangulation de \mathbf{P}_n^\bullet , alors ces $p(T)$ arcs forment une triangulation de Q_k^\bullet . De plus, puisque Q_k^\bullet possède k côtés, alors en vertu du théorème 2.12, $p(T) = k$. Ainsi, $Q_k^\bullet = Q_{p(T)}^\bullet$. Finalement, rappelons que les arcs de type I bornant $Q_{p(T)}^\bullet$, s'ils existent, ne peuvent délimiter de monogone. Par conséquent, $k = p(T) \geq 2$. \square

Le résultat sur le polygone délimitant $Q_{p(T)}^\bullet$ est un ajout facultatif par rapport aux scénarios, mais il nous servira dans la preuve du lemme 4.8.

En second lieu, nous devons définir les niveaux de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ et leur donner un ordre, le tout en fonction des images de p , S et de δ . L'utilisation d'entiers pour identifier les niveaux est adéquate, car \mathbb{Z} est naturellement ordonné. Cependant, elle doit être astucieuse, car nous désirons une connexion entre la superposition des niveaux et la structure de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$. Dans les prochains paragraphes, nous montrons que la définition suivante satisfait cette volonté :

Définition 4.6. Soit T une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet . Le *niveau* de T est la quantité entière

$$\text{niv}(T) = \delta(T)(p(T) - 1).$$

Cette formule peut paraître arbitraire, mais en réalité, elle est essentiellement le produit de deux constatations. D’abord, il y a la nécessité de raffiner les trois scénarios du lemme 4.5. Ces derniers, par commodité, sont définis en fonction des valeurs de $\delta(T)$ (ou $S(T)$). Or, dû à cela, les deux premiers scénarios admettent plusieurs possibilités pour $p(T)$ et en raison de notre étude exploratoire sur $\mathbf{E}^{\times}(\mathbf{P}_3^{\bullet})$, il faut les distinguer. Puisque $p(T) \leq n$, nous discernons $n - 1$ sous-scénarios ou niveaux pour (i), $n - 1$ pour (ii) et un seul pour (iii). Chacun d’entre eux est identifié par une paire $(p(T), \delta(T))$ unique qui, dans le cadre d’une bonne définition de $\text{niv}(T)$, doit être associée à un entier également unique. Notre formule répond à cette exigence et pour s’en convaincre, la figure 7 jumelle les paires $(p(T), \delta(T))$ à leur niveau correspondant.

$\text{niv}(T)$	$-n + 1$	\cdots	-3	-2	-1	0	1	2	3	\cdots	$n - 1$
$p(T)$	n	\cdots	4	3	2	2	2	3	4	\cdots	n
	$\delta(T) = -1$					$\delta(T) = 0$	$\delta(T) = 1$				

FIGURE 7 – Tableau des valeurs de $\text{niv}(T)$ en fonction de celles de $p(T)$ et de $\delta(T)$. L’augmentation ou la diminution de $\text{niv}(T)$ par 1 implique une variation de même amplitude soit sur $p(T)$ ou soit sur $\delta(T)$.

La seconde constatation, plus importante, derrière la définition 4.6 concerne l’ordonnancement des $2n - 1$ sous-scénarios. En les observant attentivement, nous pouvons réaliser qu’il existe un ordre où les différences entre deux sous-scénarios consécutifs sont minimales. Plus précisément, ces différences sont numériques, ont une amplitude égale à 1 et se rapportent à une seule des quantités suivantes : $p(T)$ et $\delta(T)$. Elles sont apparentes à la figure 7 où les paires $(p(T), \delta(T))$ sont correctement agencées. Concrètement, cet ordre implique que les triangulations d’un niveau se distinguent de celles d’un niveau adjacent essentiellement par l’ajout ou le retrait d’un élément. Celui-ci est soit un arc incident à la ponction ou soit un type d’étiquette qui la voisine.

Notre démarche minimaliste rejoint le flip sur une triangulation T , car l’influence de cette opération est limitée. En effet, puisqu’elle ne remplace qu’un seul arc dans T , elle ne peut, au plus, qu’ajouter ou retirer un arc incident à la ponction ou une étiquette dans $S(T)$. Dans le premier cas, le flip implique un arc de type II ou III et un de type I. Dans le second cas, il implique un arc de type II et un de type III. En vertu de la remarque 2.10 ou du lemme 4.5, cela n’est possible que si $p(T) = 2$. En résumé, nous avons bien une conformité entre l’ordre choisi (ou plus spécifiquement nos niveaux) et les flips.

Remarque 4.7. Soit T une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^{\bullet} . Si T' est une triangulation issue du flip d’un arc étiqueté de T , alors son niveau, $\text{niv}(T')$, est égal à $\text{niv}(T) - 1$, $\text{niv}(T)$ ou $\text{niv}(T) + 1$. Par conséquent, pour toutes triangulations étiquetées T_1 et T_2 de \mathbf{P}_n^{\bullet} :

$$d(T_1, T_2) \geq |\text{niv}(T_1) - \text{niv}(T_2)|.$$

Au final, la définition 4.6 n'est qu'une façon parmi d'autres de numériser les $2n - 1$ sous-scénarios et leur ordre. Notre expression de $\text{niv}(T)$ est motivée par l'élégance et tire simplement profit des quantités $p(T)$ et $\delta(T)$.

À présent, une interrogation s'impose : pouvons-nous toujours, avec des flips, monter ou descendre dans les niveaux à partir d'une triangulation quelconque ? Bien que la remarque 4.7 fait état de la possibilité, elle ne la garantit pas. Néanmoins, il s'avère que nous pouvons répondre affirmativement à cette question et, du même coup, solidifier la connexion entre les distances et les niveaux.

Lemme 4.8. *Soit T une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet . Si $\text{niv}(T) < n - 1$, alors il existe un arc $\mu \in T$ tel que $\text{niv}(\mathfrak{F}_\mu(T)) = \text{niv}(T) + 1$. De même, si $\text{niv}(T) > -n + 1$, alors il existe un arc $\epsilon \in T$ tel que $\text{niv}(\mathfrak{F}_\epsilon(T)) = \text{niv}(T) - 1$.*

Démonstration. En vertu du lemme 4.5, la ponction et les $p(T)$ arcs de T qui lui sont incidents sont délimités par un polygone $Q_{p(T)}^\bullet$ à $p(T)$ côtés. Ce dernier sera la base de notre argumentation. Nous procédons cas par cas sur les valeurs de $\text{niv}(T)$ et pour chacun d'entre eux, nous identifions les arcs μ et ϵ .

Cas 1 : $2 \leq |\text{niv}(T)| \leq n - 1$

Dans ce cas, $p(T) \geq 3$ et $|\delta(T)| = 1$. Ainsi, $Q_{p(T)}^\bullet$ délimite au moins trois arcs qui sont tous de type II ou tous de type III. Cela entraîne que la ponction est entourée de $p(T)$ triangles dont deux de leurs côtés sont parmi ces arcs et dont le troisième appartient à la frontière de $Q_{p(T)}^\bullet$. Décrit autrement, chaque triangle est adjacent à deux autres triangles entourant la ponction et inclut ce point dans ses sommets. La figure 9 illustre cette sorte de triangulation.

Si $|\text{niv}(T)| < n - 1$, c'est-à-dire si $p(T) < n$, alors $Q_{p(T)}^\bullet$ est distinct de \mathbf{P}_n^\bullet . Par conséquent, au moins un arc γ composant sa frontière est un arc de type I appartenant à T qui délimite deux triangles plutôt qu'un seul. L'un d'eux, Δ_i , est l'un des $p(T)$ triangles à l'intérieur de $Q_{p(T)}^\bullet$. Le second, Δ_e , occupe la région de \mathbf{P}_n^\bullet à l'extérieur de $Q_{p(T)}^\bullet$. L'union de ces deux triangles forme un quadrilatère et γ en est une diagonale. Pour plus de clarté, cette situation est représentée dans l'image de gauche à la figure 8. Si nous flippons γ , nous le remplaçons par l'autre diagonale du quadrilatère. Cette dernière, à la différence de γ , est incidente à la ponction qui, nous le rappelons, est un sommet de Δ_i . Ainsi, $|\text{niv}(\mathfrak{F}_\gamma(T))|$ est égal à $|\text{niv}(T)| + 1$ et $\mu = \gamma$ ou $\epsilon = \gamma$ dépendamment que $\text{niv}(T)$ soit positif ou négatif.

Inversement, ϵ ou μ , que nous notons ici ρ par souci d'uniformité, est n'importe lequel des $p(T)$ arcs (de type II ou III) à l'intérieur de $Q_{p(T)}^\bullet$. De un, chacun de ces arcs délimite deux triangles qui composent la triangulation de ce polygone. Leur union, bien entendu, forme un quadrilatère dont les quatre sommets sont la ponction et trois points sur la frontière de $Q_{p(T)}^\bullet$. Ce quadrilatère est illustré dans l'image de droite à la figure 8. De deux, ρ est la diagonale incidente à la ponction. Si nous la flippons, la diagonale obtenue lie deux points sur la frontière et ne contribue plus à la quantité $p(T)$. Conséquemment, $|\text{niv}(\mathfrak{F}_\rho(T))|$ est bien égal à $|\text{niv}(T)| - 1$.

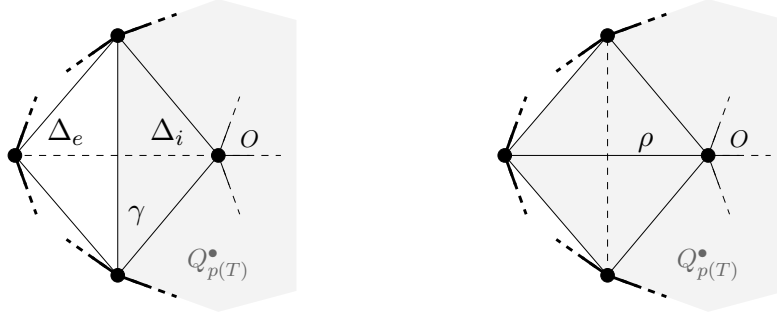


FIGURE 8 – Illustration et identification des arcs, triangles et quadrilatères impliqués dans le Cas 1 de la preuve du lemme 4.8. L’image de gauche représente une situation permettant de lier un arc de plus à la ponction. De même, l’image de droite représente une situation permettant de lier un arc de moins à la ponction. La zone grise identifie l’intérieur du polygone minimal $Q_{p(T)}^{\bullet}$ dans \mathbf{P}_n^{\bullet} qui délimite les $p(T)$ arcs incidents à la ponction O . Dans chaque quadrilatère, la diagonale pleine identifie γ ou ρ et la diagonale pointillée, son image par un flip.

Cas 2 : $|\text{niv}(T)| = 1$

Dans ce cas, $p(T) = 2$ et $|\delta(T)| = 1$. Ainsi, $Q_{p(T)}^{\bullet}$ est un digone et il délimite deux arcs de type II ou deux de type III. Si $n \geq 3$, alors $|\text{niv}(T)|$ peut croître à 2 et pour cela, nous devons flipper un arc γ parmi les deux formant la frontière du digone. Le raisonnement menant à cette conclusion est identique au cas précédent. Entre autres, bien que $Q_{p(T)}^{\bullet}$ puisse être délimité en partie par \mathbf{P}_n^{\bullet} , la condition $n \geq 3$ nous assure qu’au moins un de ces deux arcs est « flippable ».

Inversement, l’arc ρ dont le flip diminue $|\text{niv}(T)|$ à 0 est n’importe lequel des deux arcs à l’intérieur du digone. En effet, si nous flippons ρ , celui-ci est remplacé par un arc dont les extrémités sont celles du second arc, mais dont l’étiquette à la ponction diffère. Ces substitutions apparaissent dans $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_2^{\bullet})$, qui est illustré à la figure 5.

Cas 3 : $\text{niv}(T) = 0$

Dans ce cas, $p(T) = 2$ et $\delta(T) = 0$. Ainsi, $Q_{p(T)}^{\bullet}$ est un digone et il délimite un seul arc γ de type II et un seul arc γ_{\bowtie} de type III. De plus, puisque ces derniers sont compatibles, ils sont incidents au même point marqué C sur la frontière du digone. Notons par D l’autre point marqué sur la frontière. Si nous flippons γ_{\bowtie} , nous obtenons un second arc de type II, mais incident à D . Le niveau de la triangulation résultante est donc 1. De même, si nous flippons γ , nous obtenons un second arc de type III, mais incident à D ; le niveau diminue à -1 . Tout cela est également illustré à la figure 5. En somme, nous trouvons que $\mu = \gamma_{\bowtie}$ et $\epsilon = \gamma$. \square

L’erreur à ne pas commettre est d’affirmer qu’avec ce lemme, l’inégalité de la remarque 4.7 devient une égalité. Dans les faits, la distance entre deux triangu-

lations quelconques T_1 et T_2 de \mathbf{P}_n^\bullet n'est habituellement pas égale à la différence absolue $|d|$ de leur niveau. Au départ, si T_1 et T_2 sont du même niveau, mais distinctes, alors l'affirmation est fautive. Plus généralement, bien qu'il est vrai que $|d|$ flips suffisent pour passer de T_1 à une triangulation T dont le niveau est égal à $\text{niv}(T_2)$, rien ne garantit que $T = T_2$. Les flips du lemme 4.8 sont restreints en nombre et spécifiques dans leur fonction. Ainsi, au prix d'accomplir ce que nous voulons, ils ne nous rapprochent pas nécessairement de T_2 . Le graphe $\mathbf{E}^{\boxtimes}(\mathbf{P}_3^\bullet)$ à la figure 6 contient plusieurs exemples qui illustrent cela.

Cependant, la difficulté discutée ci-dessus disparaît pour les niveaux extrêmes $n-1$ et $-n+1$. Nous savons que ceux-ci regroupent les triangulations possédant respectivement n arcs de type II et n arcs de type III. Or, puisque toute triangulation de \mathbf{P}_n^\bullet possède n arcs, les triangulations de ces niveaux sont uniquement déterminées. Leur apparence particulière, un produit de l'absence d'arcs de type I, leur vaut la notation et les noms spéciaux suivants :

Définition 4.9. L'étoile « plain » est l'unique triangulation étiquetée E_p de \mathbf{P}_n^\bullet dont le niveau est $n-1$. De même, l'étoile « notched » est l'unique triangulation étiquetée E_n de \mathbf{P}_n^\bullet dont le niveau est $-n+1$.

La disposition des arcs de E_p et de E_n autour de la ponction est ce qui inspire leur appellation, car cette première rappelle une étoile. Les deux triangulations sont illustrées à la figure 9 afin de mettre cela en évidence.

En somme, si nous les faisons intervenir, l'inégalité de la remarque 4.7, à la lumière du lemme 4.8, devient une égalité. Elle prend plus spécifiquement l'une des deux formes suivantes :

Corollaire 4.10 (Lemme 4 de [CP14]). *Si T est une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet , alors :*

$$d(T, E_p) = (n-1) - \text{niv}(T) \quad \text{et} \quad d(T, E_n) = (n-1) + \text{niv}(T). \quad \square$$

4.2 La résolution du diamètre de $\mathbf{EG}(D_n)$

Puisque le lemme 4 de [CP14], sous la forme du corollaire 4.10, a été présenté, nous pouvons maintenant entamer la preuve que $\text{diam}(D_n)$ est égal à $2n-2$ lorsque $n \geq 2$. Afin d'obtenir ce résultat, nous allons montrer que $2n-2$ est à la fois une borne inférieure et une borne supérieure pour le diamètre.

Commençons par la première qui est aussi la plus simple. Pour établir celle-ci, il faut trouver deux triangulations T_1 et T_2 de \mathbf{P}_n^\bullet qui maximisent la distance $d(T_1, T_2)$ dans $\mathbf{E}^{\boxtimes}(\mathbf{P}_n^\bullet)$. Intuitivement, les étoiles E_p et E_n sont de bonnes candidates, car elles s'opposent diamétralement sur le plan des niveaux. En fait, cette simple intuition nous mène à la borne suivante :

Proposition 4.11 (Lemme 3 de [CP14]). *Pour $n \geq 2$, $\text{diam}(D_n) \geq 2n-2$.*

Démonstration. En vertu de n'importe laquelle des deux égalités du corollaire 4.10, $d(E_p, E_n) = 2n-2$. Puisque $\text{diam}(D_n)$ correspond au maximum des distances dans $\mathbf{E}^{\boxtimes}(\mathbf{P}_n^\bullet)$, il suit de cette égalité que $\text{diam}(D_n) \geq 2n-2$. \square

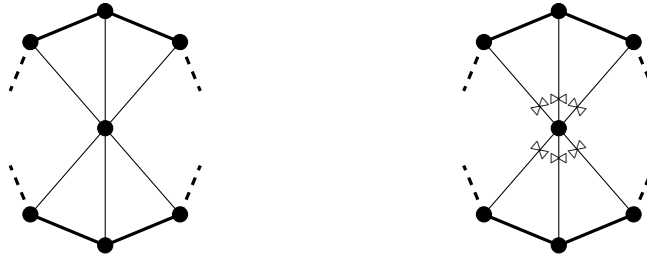


FIGURE 9 – Les deux triangulations résultant d’une utilisation exclusive d’arcs qui relient la frontière à la ponction. Celle de gauche contient uniquement des arcs de type II et celle de droite, uniquement des arcs de type III. Dans les deux cas, les triangles obtenus encerclent la ponction et la disposition des arcs rappelle une étoile. Lorsque le polygone correspond à \mathbf{P}_n^\bullet , la triangulation de gauche représente l’étoile « plain » E_p et celle de droite, l’étoile « notched » E_n .

Passons maintenant à la borne supérieure. Cette dernière est plus difficile à établir, car il faut montrer que la distance entre toute paire $\{T_1, T_2\}$ de triangulations de \mathbf{P}_n^\bullet est inférieure ou égale à $2n - 2$. D’une part, il suffit de prouver l’existence d’une suite de $2n - 2$ flips ou moins liant T_1 et T_2 . D’autre part, et parce que ces triangulations sont quelconques, l’élaboration de cette suite doit être menée dans un cadre général, d’où la difficulté de la tâche. Heureusement, les étoiles E_p et E_n apportent encore la solution.

Étant donnée E une étoile, la stratégie est de lier T_1 et T_2 avec deux suites optimales, c’est-à-dire de longueur minimale, passant par E . La première suite lie T_1 à E et la seconde, E à T_2 . Cette stratégie présente plusieurs avantages. Premièrement, la longueur d’une suite optimale entre une triangulation quelconque et E est « connue » grâce au corollaire 4.10. Deuxièmement, au prix d’un détour, nous bénéficions du fait qu’il est aisé de monter ou de descendre dans les niveaux et d’atteindre les niveaux extrêmes représentés par E_p et E_n . Finalement, puisque E admet deux possibilités, nous pouvons, dépendamment du contexte, préférer E_p ou E_n afin de minimiser les suites. Par exemple, si la moyenne de $\text{niv}(T_1)$ et de $\text{niv}(T_2)$ est positive, choisir E_p serait plus astucieux. De manière générale, plus E_p constitue un bon choix, plus E_n constitue un mauvais choix et vice versa. Ainsi, nous pouvons espérer qu’une des deux suites satisfasse la borne supérieure. Ces observations clés amènent au résultat suivant :

Proposition 4.12. *Pour $n \geq 2$, $\text{diam}(D_n) \leq 2n - 2$.*

Démonstration. Nous nous inspirons de la preuve du théorème 2 de [CP14]. Étant données deux triangulations T_1 et T_2 de \mathbf{P}_n^\bullet , considérons deux suites de flips liant ces dernières. La première, notée \mathcal{S}_p , consiste en une suite minimale de T_1 à E_p suivie d’une de E_p à T_2 . La seconde, notée \mathcal{S}_n , consiste en une suite minimale de T_1 à E_n suivie d’une de E_n à T_2 . Le nombre total de flips utilisés par celles-ci, que nous notons par $d(\mathcal{S}_p)$ et $d(\mathcal{S}_n)$, est égal à $d(T_1, E_p) + d(T_2, E_p)$ et $d(T_1, E_n) + d(T_2, E_n)$ respectivement. Par définition, ces nombres sont positifs.

En vertu du corollaire 4.10, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
 d(\mathcal{S}_p) + d(\mathcal{S}_n) &= \left(d(T_1, E_p) + d(T_2, E_p) \right) + \left(d(T_1, E_n) + d(T_2, E_n) \right) \\
 &= \left(d(T_1, E_p) + d(T_1, E_n) \right) + \left(d(T_2, E_p) + d(T_2, E_n) \right) \\
 &= \left((n-1) - \text{niv}(T_1) + (n-1) + \text{niv}(T_1) \right) + \\
 &\quad \left((n-1) - \text{niv}(T_2) + (n-1) + \text{niv}(T_2) \right) \\
 &= (2n-2) + (2n-2) \\
 &= 4n-4.
 \end{aligned}$$

Puisque $d(\mathcal{S}_p)$ et $d(\mathcal{S}_n)$ sont positifs, cette égalité implique qu'au moins un des deux est inférieur ou égal à $2n-2$, car sinon, la somme dépasserait $4n-4$. Par conséquent, $d(T_1, T_2) \leq 2n-2$ et ce pour une paire $\{T_1, T_2\}$ de triangulations quelconques de \mathbf{P}_n^\bullet . Nous concluons donc que $\text{diam}(D_n) \leq 2n-2$. \square

Au terme de notre démarche, nous sommes finalement en mesure d'énoncer, sous une forme plus complète, le théorème de [CP14] sur le diamètre de D_n .

Théorème 4.13 (Théorème 2 de [CP14]). *Le diamètre du graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n est égal à 1 si $n = 1$ et à $2n-2$ si $n \geq 2$.*

Démonstration. Si $n = 1$, le graphe $\mathbf{EG}(D_1)$ est composé de deux sommets liés par une arête. Ces sommets sont les graines (X, Q) et (X', Q) où Q est le carquois à un seul sommet et sans flèches, $X = \{x_1\}$ et $X' = \{2/x_1\}$. Nous déduisons facilement que le diamètre de ce graphe est 1. Sinon, si $n \geq 2$, le résultat suit des propositions 4.11 et 4.12. \square

Références

- [Bou12] David BOULET-ST-JACQUES : Les algèbres amassées : Définitions de base et résultats. *Cahier de Mathématique de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)*, 2:135–150, Avril 2012.
- [CP14] Cesar CEBALLOS et Vincent PILAUD : The diameter of type D associahedra and the non-leaving-face property. arXiv : 1406.0368v1 [math.CO], Juin 2014.
- [Dou12] Guillaume DOUVILLE : Triangulations, carquois et théorème de Ptolémée. *Cahier de Mathématique de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)*, 2:59–77, Avril 2012.
- [FST08] Sergey FOMIN, Michael SHAPIRO et Dylan THURSTON : Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I : Cluster complexes. *Acta Mathematica*, 201(1):83–146, Septembre 2008.

- [FZ02] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras I : Foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2):497–529, Avril 2002.
- [FZ03a] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras II : Finite type classification. *Inventiones mathematicae*, 154(1):63–121, Octobre 2003.
- [FZ03b] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Y-systems and generalized associahedra. *Annals of Mathematics*, 158(3):977–1018, Novembre 2003.
- [Ngu07] Bertrand NGUEFACK : Introduction aux Algèbres amassées : Définitions et exemples. Rapport de recherche 2007-41, Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke, Janvier 2007.
- [Pou14] Lionel POURNIN : The diameter of associahedra. *Advances in Mathematics*, 259:13–42, Juillet 2014. Première version publiée sur arXiv en juillet 2012.
- [STT88] Daniel D. SLEATOR, Robert E. TARJAN et William P. THURSTON : Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *Journal of the American Mathematical Society*, 1(3):647–681, Juillet 1988.

YANNICK LEBRUN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Yannick.Lebrun@USherbrooke.ca

CaMUS est une revue mathématique publiée par le Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke. Le but de ces cahiers est de permettre aux étudiants de présenter leurs travaux effectués dans le cadre d'activités comme les stages de recherche du premier cycle, les présentations au Club Mathématique et les cours d'initiation à la recherche. Les auteurs sont principalement des étudiants du premier cycle, notamment en mathématiques et au Baccalauréat en enseignement au secondaire avec profil en mathématiques. Cette revue est publiée à l'intention de tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques, à l'Université de Sherbrooke et ailleurs. Ses objectifs sont de favoriser :

- l'apprentissage de la rédaction d'articles dès le premier cycle,
- l'amélioration de la communication écrite,
- le développement de la rigueur d'expression,
- la motivation des étudiants pour la recherche en général.

Le comité de rédaction de CaMUS est composé des étudiants :

- Félix Camirand Lemyre
- Guillaume Douville
- David Racicot-Desloges
- Adam Salvail (rédacteur gérant)

et des professeurs :

- Ibrahim Assem
- Taoufik Bouezmarni
- Virginie Charette (rédactrice en chef)
- Tomasz Kaczynski

Information aux auteurs : Les articles doivent constituer des présentations originales mais on ne demande pas qu'ils contiennent des résultats originaux : pour la prépublication de ces derniers, la série de Rapports de recherche du Département de mathématiques est un meilleur médium. Les articles doivent être rédigés en \LaTeX et soumis suivant les instructions données à la page Web de CaMUS :

<http://camus.dmat.usherbrooke.ca>

Abonnement, achat d'exemplaires et autres renseignements : CaMUS est une publication électronique sans frais avec un nombre limité d'exemplaires imprimés à vendre. Pour des informations sur le prix courant, le mode de paiement ou pour nous contacter, rendez-vous à l'adresse Web indiquée ci-dessus.

CaMUS · Département de mathématiques · Faculté des sciences · Université de Sherbrooke · 2500, boulevard de l'Université · Sherbrooke (Québec), Canada J1K 2R1