CaMUS **4**, 16 – 26

Fractions continues et arbre de Stern-Brocot

Tanna Sánchez McMillan

Résumé Cet article traite de la relation entre l'arbre de Stern-Brocot et les fractions continues. La notion de fraction continue est, d'abord, succinctement présentée basée sur le concept de polynôme continuant. Ensuite, passant par les suites de Brocot, on explore diverses propriétés de l'arbre de Stern-Brocot pour finalement analyser le lien entre celui-ci et les fractions continues.

1 Introduction

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) [Ste58] et par Achille Brocot (1861) [Bro61], horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée. L'arbre est une structure mathématique ayant de très intéressantes propriétés algébriques et combinatoires dont certaines ont été récemment explorées par Graham [GK94]. En outre, plusieurs études comparent l'arbre de Stern-Brocot à d'autres structures combinatoires telles que les suites de Farey et les codes de Gray. D'autre part, l'apparition des fractions continues est attribuée à Euclide vers 300 av. J.-C. En effet, les quotients successifs qui résultent de l'application de l'algorithme d'Euclide à deux entiers sont précisément les nombres qui composent la représentation sous forme de fraction continue du quotient de ces deux entiers. Dernièrement, les fractions continues ont fait leur apparition dans plusieurs autres branches des mathématiques. Ainsi, une étude récente de Rob Corless [Cor92] examine le lien entre les fractions continues et la théorie du chaos.

2 Fractions continues

Définition 2.1. Soit $x_i \in \mathbb{Z}$ tel que $x_i \neq 0$ pour tout $i \neq 0$. Une expression de la forme

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{x_n}}}}$$

Je tiens à remercier le professeur Ibrahim Assem, qui m'a guidée tout au long de mes recherches, ainsi que le programme des bourses de recherche de premier cycle du CRSNG.

est appelée *fraction continue.* On la dénote $[x_0; x_1, \ldots ,x_n]$. Les x_i se nomment les *quotients incomplets* de celle-ci.

Notre premier objectif est de trouver une expression récursive pour ces fractions continues. Cela nous mène à la notion de polynôme continuant.

Définition 2.2. Soit $\{x_i\}_{i\geq 0}$ une famille d'indeterminées. Pour chaque entier $n \geq -1$, on définit le n^e *polynôme continuant* comme suit : $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, p_n est défini au moyen de la relation de récurrence

$$p_n(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}) = x_0 p_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) + p_{n-2}(x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}).$$

Voici par exemple les polynômes continuants d'ordre 1 jusqu'à 4 :

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= x_0 \\ p_2(x_0, x_1) &= x_0 x_1 + 1 \\ p_3(x_0, x_1,x_2) &= x_0 x_1 x_2 + x_0 + x_2 \\ p_4(x_0, x_1,x_2,x_3) &= x_0 x_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 + x_0 x_3 + x_2 x_3 + 1. \end{aligned}$$

Lemme 2.3. *La fraction continue $[x_0; x_1, \ldots ,x_n]$ est le quotient de l'évaluation de deux polynômes continuants consécutifs. En d'autres mots, étant donné $x_0, x_1, \ldots ,x_n \in \mathbb{Z}$, on a que*

$$[x_0; x_1, \ldots ,x_n] = \frac{p_n(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})}{p_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}.$$

Démonstration. L'énoncé est prouvé par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $\frac{p_1(x_0)}{p_o} = x_0$. Supposons le résultat vrai pour un $n \geq 1$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}(x_0,x_1,\ldots,x_n)}{p_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)} &= \frac{x_0 p_n(x_1,\ldots,x_n) + p_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)}{p_n(x_1,\ldots,x_n)} \\ &= x_0 + \frac{p_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)}{p_n(x_1,\ldots,x_n)} \\ &= x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{x_n}}}} \end{aligned}$$

en vertu de l'hypothèse de récurrence. □

Remarque 2.4. On a que

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \dots \cfrac{1}{x_{n-2} + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{p_n(x_0,x_1,\dots,x_{n-2},1)}{p_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-2},1)}$$
$$= \frac{p_{n-1}(x_0,x_1,\dots,x_{n-2}+1)}{p_{n-2}(x_1,x_2,\dots,x_{n-2}+1)}.$$

3 Suites de Brocot

Définition 3.1. On appelle *médiation* l'opération definie par

$$\left(\mathbb{Q}^+ \cup \left\{\frac{1}{0}\right\}\right) \times \left(\mathbb{Q}^+ \cup \left\{\frac{1}{0}\right\}\right) \to \mathbb{Q}^+ \cup \left\{\frac{i}{0}\right\}$$
$$\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}_*$.

La fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est appelée la *médiante* des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

L'opération de médiation est commutative, mais elle n'est ni associative ni distributive par rapport à la multiplication. Cette opération n'a pas non plus d'élément neutre.

On rappelle au lecteur qu'une fraction est dite *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont copremiers.

Définition 3.2. La *suite de Brocot d'ordre n*, notée B_n, est la suite finie et ordonnée des fractions irréductibles telle que $B_0 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{0}\right\}$ et que, pour tout $i \geq 1$, on construit B_i en insérant au milieu de chaque couple de fractions adjacentes $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ de B_{i-1} la médiante $\frac{a+c}{b+d}$ de celles-ci.

Voici les suites de Brocot d'ordre 0 à 3 :

$$B_0 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{0}\right\}$$
$$B_1 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{0}\right\}$$
$$B_2 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{0}\right\}$$
$$B_3 = \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{1}{0}\right\}.$$

Lemme 3.3. *Pour tout $i \geq 0$, la suite B_i est strictement croissante.*

Démonstration. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions adjacentes de la suite B_{i-1}. Alors, on a que

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > \frac{1}{b(b+d)} > 0,$$

car $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entraîne $ad < bc$.

De même, on voit facilement que $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} < 0$.

On a donc que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. □

Lemme 3.4. *Si deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont adjacentes dans une suite de Brocot B_i, alors la matrice $\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$ appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur i. Le résultat est vrai pour B_0, car la matrice associée à cette suite est la matrice identité $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dont le déterminant est 1.

Supposons que l'énoncé est vrai pour un certain $i > 0$. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions adjacentes dans la suite B_i. En vertu de l'hypothèse de récurrence, on a deux cas possibles :

Cas 1 : $\frac{a}{b} \in B_{i-1}$ et $\frac{c}{d} \notin B_{i-1}$

Ainsi, on a $B_{i-1} = \left\{\dots, \frac{a}{b}, \frac{e}{f}, \dots\right\}$ et $B_i = \left\{\dots, \frac{a}{b}, \frac{a+e}{b+f}, \frac{e}{f}, \dots\right\}$.

En vertu de l'hypothèse de récurrence, $\det \begin{bmatrix} b & f \\ a & e \end{bmatrix} = 1$, c'est-à-dire $be - af = 1$. Ainsi,

$$\det \begin{bmatrix} b & b+f \\ a & a+e \end{bmatrix} = b(a+e) - a(b+f) = be - af = 1$$

Cas 2 : $\frac{a}{b} \notin B_{i-1}$ et $\frac{c}{d} \in B_{i-1}$

La preuve est semblable à celle du cas 1. □

Corollaire 3.5. *Soit $\frac{a}{b}$ une fraction dans une suite de Brocot. Alors, $\frac{a}{b}$ est irréductible.*

Démonstration. On a montré au lemme 3.4 qu'il existe $s,t \in \mathbb{N}$ tels que $as - bt = 1$. En vertu du Lemme de Bézout, on conclut que a et b sont copremiers. □

Le théorème suivant montre que les suites de Brocot sont un moyen d'ordonner totalement l'ensemble des fractions positives irréductibles.

Théorème 3.6. *Toute fraction positive irréductible apparaît une fois et une seule dans une suite de Brocot.*

Démonstration. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction positive irréductible. On a que $\frac{0}{1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{0}$ donc $\frac{a}{b}$ n'appartient pas à B_0. Supposons que $\frac{a}{b}$ n'appartienne pas à B_i pour un certain i. Alors, il existe deux fractions adjacentes $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ de B_i telles que $\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$. Puis, calculons la médiante $\frac{m+m'}{n+n'}$. On se retrouve dans une des trois situations suivantes :

(i) $\frac{a}{b} = \frac{m+m'}{n+n'}$, alors $\frac{a}{b}$ appartient à la suite B_{i+1} ;

(ii) $\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m+m'}{n+n'}$, alors on remplace la fraction $\frac{m'}{n'}$ par $\frac{m+m'}{n+n'}$ et on a que $\frac{a}{b}$ n'appartient pas à B_{i+1}. On recommence le processus ;

(iii) $\frac{m+m'}{n+n'} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$ alors on remplace la fraction $\frac{m}{n}$ par $\frac{m+m'}{n+n'}$ et on a que $\frac{a}{b}$ n'appartient pas à B_{i+1}. On recommence le processus.

Cette démarche ne continue pas de façon indéfinie, puisque $\frac{a}{b} - \frac{m}{n} > 0$ et $\frac{m'}{n'} - \frac{a}{b} > 0$ entraînent que $an - bm \geq 1$ et $bm' - an' \geq 1$.

On a donc que

$$\begin{aligned}(m'+n')(an-bm)+(m+n)(bm'-an') &\geq m'+n'+m+n \\ a(nm'-n'm)+b(nm'-n'm) &\geq m'+n'+m+n.\end{aligned}$$

En vertu du lemme 3.4 et du fait que les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ soient adjacentes dans un B_i, on a que $nm' - n'm = 1$ donc

$$a+b \geq m'+n'+m+n.$$

En d'autres termes, la somme des numérateurs et des dénominateurs des fractions $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ adjacentes dans B_i ne dépasse pas la quantité fixe $a+b$.

Supposons que cette somme soit strictement plus petite que $a+b$. Alors, en remplaçant l'une des fractions $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ par la médiante, on voit qu'au moins une des quantités m',n',m,n augmente d'au moins 1. Répétant ce processus tant que $m'+n'+m+n$ est strictement plus petit que $a+b$, on en déduit que dans au plus $a+b$ étapes, on aura l'égalité, c'est à dire :

$$a+b = m'+n'+m+n.$$

On a donc égalité dans chacune des inegalités plus haut. En particulier, on obtient que

$$an - bm = 1$$

et que

$$bm' - an' = 1.$$

En résolvant ces deux équations, on trouve que $a = m+m'$ et $b = n+n'$. On est donc dans la situation (i).

Enfin, en vertu du lemme 3.3, chaque fraction irréductible apparaît au plus une fois dans une suite de Brocot. $\square$

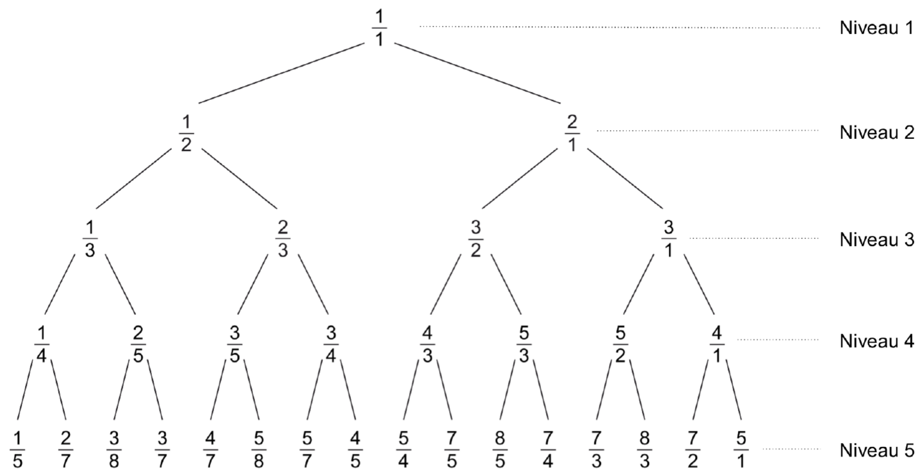

FIGURE 1 – Arbre de Stern-Brocot

4 Arbre de Stern-Brocot

Rappelons qu'un arbre est appelé binaire si chaque sommet est adjacent au plus à deux sommets au niveau inférieur, appelés ses fils.

Définition 4.1. *L'arbre de Stern-Brocot* est défini comme suit : l'ensemble des sommets de cet arbre est l'ensemble des toutes les fractions positives irréductibles. Il existe une arête entre le sommet $\frac{a}{b}$ au niveau i de cet arbre et le sommet $\frac{c}{d}$ au niveau $i-1$ si et seulement si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des fractions adjacentes dans la suite B_i. Ainsi, l'arbre de Stern-Brocot est un arbre binaire infini qui se construit à partir des suites de Brocot. Pour tout $i \geq 1$, les sommets du niveau i dans l'arbre sont les médiantes des fractions dans la suite B_{i-1}. La racine de l'arbre est la fraction $\frac{1}{1}$ issue de la médiation de $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ dans B_0. La figure 1 illustre les cinq premiers niveaux de l'arbre de Stern-Brocot.

Remarque 4.2. Dans les sommets du niveau i de l'arbre de Stern-Brocot, on ne trouve que les fractions qui apparaissent pour la première fois dans la suite de Brocot d'ordre i. En d'autres termes, dans le niveau i de l'arbre on ne trouve que les fractions qui sont éléments de l'ensemble $B_i \setminus B_{i-1}$.

Définition 4.3. On définit *l'ancêtre gauche* $\frac{m}{n}$ et *l'ancêtre droit* $\frac{m'}{n'}$ de la fraction $\frac{m+m'}{n+n'}$ comme étant le plus proche voisin gauche et le plus proche voisin droit, respectivement, au dessus de $\frac{m+m'}{n+n'}$ dans l'arbre de Stern-Brocot.

En vertu du lemme 3.3, toute fraction $\frac{a+c}{b+d}$ se trouve dans l'intervalle $]\frac{a}{b},\frac{c}{d}[$ dont les bornes inférieure et supérieure sont ses ancêtres gauche et droit respectivement. Représentons cet intervalle sous forme matricielle par la matrice $\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$ qui appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$. Notons qu'en multipliant cette matrice par le vecteur $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ on obtient le vecteur $\begin{bmatrix}b+d\\a+c\end{bmatrix}$ et la pente de la droite qui passe par le point correspondant au second vecteur et l'origine est $\frac{a+c}{b+d}$.

D'ailleurs, chaque sommet de l'arbre de Stern-Brocot peut être représenté de façon unique par une suite de déplacements vers le bas en partant du sommet $\frac{1}{1}$:

$$D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}},$$

où D représente un déplacement vers la droite, G représente un déplacement vers la gauche et x_i est le nombre de fois que le déplacement est itéré avec $x_0 \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{N}_*$ pour tout $i \in \{1,2,\dots n-2\}$ et $x_{n-1} \in \mathbb{N}$.

Notation 4.4. Soit $f(D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}})$ la fraction positive irréductible obtenue à partir de l'arbre de Stern-Brocot en suivant la suite de déplacements $D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}}$.

Exemple 4.5. $f(D^0G^1D^1G^2) = \frac{4}{7}$.

Notation 4.6. Soit la fonction

$$g : SL_2(\mathbb{N}_*) \to \mathbb{Q}*_+$$

définie par

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix} \longmapsto \frac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta}.$$

où $SL_2(\mathbb{N}_*)$ est l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{N}_*$ et dont le déterminant est 1.

Proposition 4.7. *Soit* $\bar{G} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ *et* $\bar{D} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. *Alors, on a*

$$f(D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}}) = g(\bar{D}^{x_0}\bar{G}^{x_1}\bar{D}^{x_2}\bar{G}^{x_3}\dots \bar{D}^{x_{n-2}}\bar{G}^{x_{n-1}})$$

pour $x_0 \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{N}_*$ *pour* $i \geq 1$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Soit $M = D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_{n-2}}G^{x_{n-1}}$ une suite de déplacements telle que $f(M)$ se trouve au niveau $i \geq 1$ de l'arbre de Stern-Brocot. Si $i = 1$, alors $f(M) = \frac{1}{1}$ est la médiante de $f(N_1) = \frac{0}{1}$ et de $f(N_2) = \frac{1}{0}$ et la paire $(f(N_1),f(N_2))$ est représentée par la matrice identité $I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Supposons $i \geq 2$ et que $f(N_1) = \frac{a}{b}$ et $f(N_2) = \frac{c}{d}$ sont deux fractions adjacentes à $f(M) = \frac{a+c}{b+d}$ dans B_i. Sans perte de généralité, on peut supposer $f(N_1)$ de niveau $i-1$, et $f(N_2)$ au plus de niveau $i-2$.

Dans le premier cas, celui où $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, on a $f(M) = f(N_1,D)$ et, par ailleurs, la matrice résultant d'un déplacement vers la droite, D, est

$$\begin{bmatrix}b+d & d\\ a+c & c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b & d\\ a & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b & d\\ a & c\end{bmatrix}\bar{D}.$$

Dans le second cas, celui où $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, on a $f(M) = f(N_1 G)$ et par ailleurs, la matrice résultant d'un déplacement vers la gauche, G, est

$$\begin{bmatrix} b & b+d \\ a & a+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix} \bar{G}.$$

Posant $\bar{M} = \bar{D}^{x_0} \bar{G}^{x_1} \ldots \bar{D}^{x_{n-2}} \bar{G}^{x_{n-1}}$, l'hypothèse de récurrence dit que $f(N_1) = g(\bar{N}_1)$. La première égalité matricielle plus haut donne que $f(M) = f(N_1 D) = g(\bar{N}_1 \bar{D})$ et la seconde que $f(M) = f(N_1 G) = g(\bar{N}_1 \bar{G})$. □

Exemple 4.8. $\bar{D}^0 \bar{G}^1 \bar{D}^1 \bar{G}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $g\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{4}{7} = f(D^0 G^1 D^1 G^2)$.

Résumons à l'aide de la figure 2.

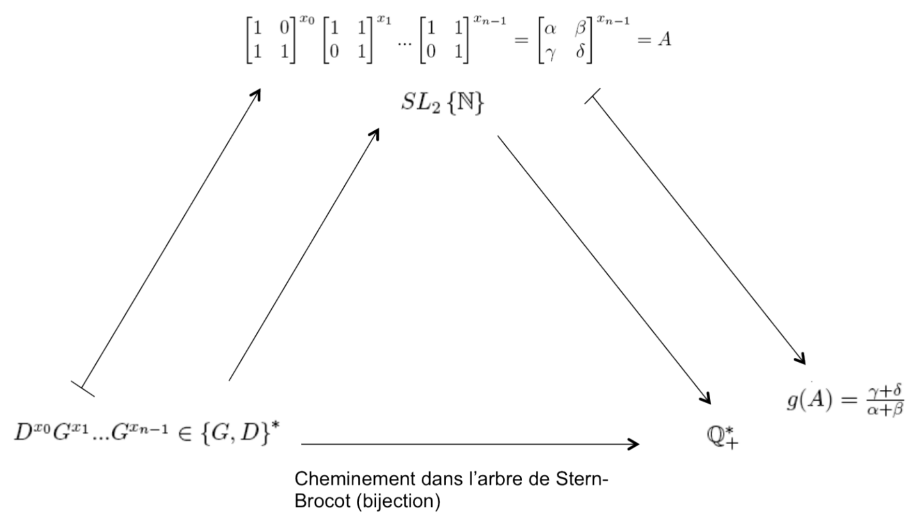

FIGURE 2 – Résumé

Chaque suite du monoïde libre $\{G,D\}^*$ peut s'exprimer par un produit des matrices $\bar{G}$ et $\bar{D}$. On obtient la fraction $r = \frac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta}$ en appliquant la fonction g à la matrice $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ qui résulte de ce produit.

Lemme 4.9. *On a que* $\bar{G}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $\bar{D}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$.

Démonstration. C'est une simple récurrence sur n. □

Lemme 4.10. *On a que*

$$\bar{D}^{x_0} \bar{G}^{x_1} \bar{D}^{x_2} \bar{G}^{x_3} \ldots \bar{D}^{x_{n-2}} \bar{G}^{x_{n-1}} = \begin{bmatrix} p_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}) & p_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-2}) & p_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Démonstration. On procède par récurrence en utilisant la définition 2.2 de polynôme continuant.

Si $n = 2$, on a que

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1(x_1) \\ p_1(x_0) & p_2(x_0,x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ x_0 & x_0x_1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{D}^{x_0}\bar{G}^{x_1}.$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence, on a que

$$\begin{aligned}
&\bar{D}^{x_0}\bar{G}^{x_1}\bar{D}^{x_2}\bar{G}^{x_3}\dots\bar{D}^{x_n}\bar{G}^{x_{n+1}} \\
&= \begin{bmatrix} p_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2}) & p_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2}) & p_n(x_0,\dots,x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2}) + p_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})x_n & p_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2}) + p_n(x_0,\dots,x_{n-1})x_n & p_n(x_0,\dots,x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_n(x_1,\dots,x_n) & p_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ p_{n+1}(x_0,\dots,x_n) & p_n(x_0,\dots,x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_n(x_1,\dots,x_n) & p_n(x_1,\dots,x_n)x_{n+1} + p_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ p_{n+1}(x_0,\dots,x_n) & p_{n+1}(x_0,\dots,x_n)x_{n+1} + p_n(x_0,\dots,x_{n-1}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_n(x_1,\dots,x_n) & p_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) \\ p_{n+1}(x_0,\dots,x_n) & p_{n+2}(x_0,\dots,x_{n+1}) \end{bmatrix}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 4.11. *Pour tout sommet $D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_n}G^{x_{n-1}}$ de l'arbre de Stern-Brocot, il existe une fraction continue $[x_0; x_1, \dots, x_{n-1}]$ telle que*

$$f(D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_n}G^{x_{n-1}}) = [x_0; x_1, \dots, x_{n-1}+1].$$

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned}
&f(D^{x_0}G^{x_1}D^{x_2}G^{x_3}\dots D^{x_n}G^{x_{n-1}}) \\
&= g(\bar{D}^{x_0}\bar{G}^{x_1}\bar{D}^{x_2}\bar{G}^{x_3}\dots\bar{D}^{x_{n-2}}\bar{G}^{x_{n-1}}) \\
&= g\left(\begin{bmatrix} p_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2}) & p_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ p_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2}) & p_n(x_0,\dots,x_{n-1}) \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{p_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2}) + p_n(x_0,\dots,x_{n-1})}{p_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2}) + p_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})} \\
&= \frac{p_{n+1}(x_0,\dots,x_{n-1},1)}{p_n(x_1,\dots,x_{n-1},1)} \\
&= \frac{p_n(x_0,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+1)}{p_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+1)}
\end{aligned}$$

en vertu de la remarque 2.4. Puis, il suit du lemme 2.3 que

$$\begin{aligned}
g(\bar{D}^{x_0}\bar{G}^{x_1}\bar{D}^{x_2}\bar{G}^{x_3}\dots\bar{D}^{x_{n-2}}\bar{G}^{x_{n-1}}) &= x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \dots \cfrac{1}{x_{n-1} + \cfrac{1}{1}}} \\
&= [x_0; x_1, \dots, x_{n-1}, 1]\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque 4.12. De même, on peut facilement retrouver le chemin dans l'arbre de Stern-Brocot correspondant à une fraction continue finie :

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \dots \cfrac{1}{x_{n-1}}} = f(D^{x_0} G^{x_1} D^{x_2} G^{x_3} \dots D^{x_{n-2}} G^{x_{n-1}-1}).$$

Exemple 4.13. $f(D^0 G^1 D^1 G^2) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{4}{7}$.

Lemme 4.14. *La médiante de deux fractions continues*

$$\tfrac{k}{l} = [x_0; x_1, \dots, x_{n-1}, \tfrac{a}{b}] \text{ et } \tfrac{k'}{l'} = [x_0; x_1, \dots, x_{n-1}, \tfrac{c}{d}]$$

ayant les mêmes premiers quotients incomplets $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ *dans le même ordre est* $[x_0; x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{e}{f}]$*, où* $\frac{e}{f}$ *est la fraction médiante de* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$*.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3,

$$\begin{aligned} \frac{k}{l} &= \frac{p_{n+1}(x_0, \dots, x_{n-1}, \frac{a}{b})}{p_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{a}{b})} \\ &= \frac{p_n(x_0, \dots, x_{n-1})\frac{a}{b} + p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})\frac{a}{b} + p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})} \\ &= \frac{ap_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + bp_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{ap_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + bp_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})}. \end{aligned}$$

De façon semblable, $\frac{k'}{l'} = \frac{cp_n(x_0,\dots,x_{n-1}) + dp_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2})}{cp_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) + dp_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2})}$, donc

$$\begin{aligned} \frac{k}{l} \oplus \frac{k'}{l'} &= \frac{(a+c)p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + (b+d)p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{(a+c)p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + (b+d)p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})} \\ &= \frac{\frac{a+c}{b+d}p_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + p_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2})}{\frac{a+c}{b+d}p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})} \\ &= \frac{p_{n+1}(x_0, \dots, x_{n-1}, \frac{a+c}{b+d})}{p_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{a+c}{b+d})} \\ &= \left[x_0; \dots, x_{n-1}, \frac{a+c}{b+d}\right]. \end{aligned}$$

□

Le résultat suivant provient de [Luc91].

Proposition 4.15. *La fraction* $\frac{a}{b}$ *comprise entre* 0 *et* 1 *dont le développement en fraction continue est* $[0; x_1, \dots, x_n]$ *apparaît sous forme irréductible au* $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^e$ *niveau de l'arbre de Stern-Brocot.*

Démonstration. Soit $\frac{a}{b} = [x_0; x_1, \ldots, x_n]$. Alors, $\frac{1}{x_1+1} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1}{x_1}$.

Dans la suite $B_{(x_1+1)}$, les fractions $\frac{1}{x_1+1}$ et $\frac{1}{x_1}$ sont consécutives, plus précisement, elles sont le deuxième et le troisième élément de cette suite respectivement. Alors, d'après le lemme 3.3, $\frac{a}{b}$ se retrouve pour la première fois dans une suite ultérieure à $B_{(x_1+1)}$ et entre $\frac{1}{x_1+1}$ et $\frac{1}{x_1}$.

Maintenant, on calcule la médiante de $\frac{1}{x_1+\frac{1}{1}}$ et $\frac{1}{x_1+\frac{0}{1}}$ en appliquant le lemme précédent. On obtient $\frac{1}{x_1+\frac{1}{2}}$ qui se trouve pour la première fois dans la suite $B_{(x_1+2)}$. Puis, on calcule la médiante de cette fraction et de $\frac{1}{x_1+\frac{0}{1}}$. En répétant cette opération de médiation un total de $x_2 - 1$ fois, on obtient la fraction continue $\frac{1}{x_1+\frac{1}{x_2}}$, qui apparaît pour la première fois dans la suite $B_{(x_1+x_2)}$. Ainsi, en vertu de la construction de l'arbre de Stern-Brocot, $\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1+\frac{1}{x_2}}$ se trouve dans le $(x_1 + x_2)^e$ niveau de l'arbre.

En vertu de l'hypothèse de récurrence, $[0; x_1, \ldots, x_{n-1} + 1]$ se trouve sur un sommet du $(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + 1)^e$ niveau de l'arbre de Stern-Brocot et alors apparaît pour la première fois dans la suite $B_{(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+1)}$. De plus, dans cette suite, $[0; x_1, \ldots, x_{n-1} + 1]$ et $[0; x_1, \ldots, x_{n-1}]$ sont consécutives. Si on calcule la médiante de ces deux fractions, on obtient $[0; x_1, \ldots, x_{n-1}, 2]$ qui apparaît pour la première fois dans la suite $B_{(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+2)}$. Si on répète cette opération de médiation un total de $x_n - 1$ fois, on obtient la fraction continue $[0; x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]$ qui apparaît pour la première fois dans la suite $B_{(\sum_{i=1}^n x_i)^e}$ et, en vertu de la construction de l'arbre de Stern-Brocot, se trouve au $(\sum_{i=1}^n x_i)^e$ niveau de celui-ci. □

Références

[Bro61] Achille BROCOT : Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode. *Revue Chonométrique*, 3:186–194, 1861.

[Cor92] Robert CORLESS : Continued fractions and chaos. *The American Mathematical Monthly*, 99(3):203–215, 1992.

[GK94] Ronald L. GRAHAM et Donald E. KNUTH : *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science.* Addison-Wesley, Boston, MA, USA, 1994.

[Luc91] Edouard LUCAS : *Théorie des nombres.* Jacques Gabay, Paris, 1891.

[Ste58] Moritz STERN : Über eine zahlentheoretische funktion. *Crelle's Journal*, 55:193–220, 1858.

TANNA SÁNCHEZ MCMILLAN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: tanna.sanchez@USherbrooke.ca