CaMUS **2** (2012), 135–150

Les algèbres amassées: Définitions de base et résultats

David Boulet-St-Jacques

1. Introduction

C'est au début des années 2000 que Sergey Fomin et Andreï Zelevinsky ont introduit la classe des algèbres amassées [**FZ02**]. Leur but principal était alors de fournir un cadre adéquat pour comprendre l'aspect combinatoire de la positivité totale et des bases canoniques duales. Bien que cet objectif ne soit pas encore atteint, le cadre des algèbres amassées s'est révélé extrêmement fructueux pour les mathématiques, puisqu'il a permis de relier des domaines qui, à prime abord, n'avaient pas de liens entre eux. Parmi ces domaines, on compte la géométrie de Poisson, la physique mathématique et la théorie de Lie.

L'objectif de cet article est de fournir une brève initiation à cette classe d'algèbres. La section 2 présentera les algèbres amassées sans coefficients tandis que la section 3 abordera le phénomène Laurent et la conjecture de positivité. Enfin la section 4 présentera les algèbres amassées avec coefficients.

2. Algèbres amassées sans coefficients

2.1. Définitions initiales

Afin de commencer notre étude des algèbres amassées, nous introduirons quelques notions fondamentales.

Définition 2.1.
Une $\mathbb{Z}$-**algèbre**, ou anneau, est un quadruplet $(A, +, \cdot, 1)$ (ou plus brièvement A) formé d'un groupe abélien $(A, +)$ muni d'une opération interne $A \times A \to A$ et d'un élément $1 \in A$ satisfaisant aux axiomes suivants :

(1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ pour tous $a, b, c \in A$,

(2) Il existe $1 \in A$ tel que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ pour tous $a \in A$,

(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ pour tous $a, b, c \in A$,

(4) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ pour tous $a, b, c \in A$.

Je tiens à remercier Myriam Chabot et Guillaume Douville pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans l'élaboration de ce travail et pour les précieuses discussions relatives à cet article. De plus, je remercie Ibrahim Assem pour les nombreux conseils et l'encadrement qu'il m'a fourni. Finalement, je remercie Ibrahim Assem et le LaCIM pour le financement de cette recherche.

Les algèbres amassées sont des $\mathbb{Z}$-algèbres possèdant une riche structure combinatoire. Ce sont d'ailleurs des outils combinatoires qui permettent de définir les algèbres amassées.

Un **carquois** est un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ où Q_0 est un ensemble dont les éléments sont appelés *sommets*, Q_1 est un ensemble dont les éléments sont appelés *flèches*, et s, b sont des fonctions de Q_1 dans Q_0. Les fonctions $s, b : Q_1 \to Q_0$ associent à chaque $\gamma \in Q_1$ sa *source* $s(\gamma)$ et son *but* $b(\gamma)$. Soit $k \in Q_0$ un sommet du carquois. On dit que k est une **source** (ou un **puits**) de Q s'il n'existe aucune flèche $\alpha \in Q_1$ telle que $b(\alpha) = k$ (ou que $s(\alpha) = k$, respectivement). Par exemple,

$$\begin{tikzcd}
 & & & \bullet_5 \\
\bullet_1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \bullet_2 \arrow[r, "\delta"] & \bullet_3 \arrow[ll, bend right, "\gamma"'] \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\epsilon"] & \\
 & & & \bullet_4
\end{tikzcd}$$

est un carquois ayant 5 sommets $\{1, \ldots, 5\}$ et 6 flèches $\{\alpha, \beta, \ldots, \epsilon, \lambda\}$. Les sommets 4 et 5 sont des puits, mais il n'y a aucune source. Dans notre étude, nous ne considérerons que des carquois finis sans boucles ni 2-cycles. Une **boucle** est une flèche γ dans Q_1 telle que $s(\gamma) = b(\gamma)$. Une boucle est donc un carquois de la forme

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \end{tikzcd} \quad .$$

Un **2-cycle** est une paire (γ, δ) de flèches dans Q_1 telle que $s(\gamma) = b(\delta)$ et $s(\delta) = b(\gamma)$. Un 2-cycle est donc un carquois de la forme

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left, "\gamma"] & \bullet \arrow[l, shift left, "\delta"] \end{tikzcd} \quad .$$

Ainsi, dans ce texte, le mot carquois désignera toujours un carquois fini sans boucles ni 2-cycles. Les algèbres amassées sont définies à l'intérieur du corps ambiant des fractions rationnelles.

Définition 2.2.
Soit $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à coefficients entiers en n indéterminées $x_1, \ldots, x_n$. Le **corps des fractions rationnelles** $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ se définit de la façon suivante

$$\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} \mid f, g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \right\},$$

muni des opérations usuelles des fractions. Par la suite, ce corps sera appelé **corps ambiant.**

Définition 2.3.
On appelle **amas initial** l'ensemble fini $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ des n générateurs du corps ambiant $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$. Ces variables sont appelées **variables initiales**.

Nous continuons notre étude des algèbres amassées, en définissant la notion de mutation.

2.2. Mutations

Définition 2.4.
La **mutation** d'un carquois Q en un sommet k transforme Q en un nouveau carquois $Q' = \mu_k(Q)$ obtenu au moyen des étapes suivantes :

(1) Pout tout chemin de longueur 2 de type $i \to k \to j$, on ajoute une flèche $i \to j$.

(2) On renverse le sens de toutes les flèches incidentes à k.

(3) On élimine un à un tous les 2-cycles.

On définit alors une **suite de mutations** comme étant la composition de plusieurs mutations. Considérons un carquois Q ayant plus de 6 sommets, la composition de mutations $\mu_3\mu_2\mu_6(Q)$ indique que l'on doit appliquer une mutation au sommet 6, puis au sommet 2 et finalement au sommet 3 du carquois Q.

Exemple 2.5.

a) Soit Q le carquois $\bullet^1 \longrightarrow \bullet^2 \longrightarrow \bullet^3$. Appliquons $\mu_1\mu_2(Q)$ et $\mu_2\mu_1(Q)$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet^1 \arrow[r] & \bullet^2 \arrow[r] & \bullet^3 & \overset{}{\underset{\mu_2}{\rightsquigarrow}} & \bullet^1 \arrow[rr, bend left] & \bullet^2 \arrow[l] & \bullet^3 \arrow[l] & \underset{\mu_1}{\rightsquigarrow} & \bullet^1 \arrow[r] & \bullet^2 & \bullet^3 \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet^1 \arrow[r] & \bullet^2 \arrow[r] & \bullet^3 & \underset{\mu_1}{\rightsquigarrow} & \bullet^1 & \bullet^2 \arrow[l] \arrow[r] & \bullet^3 & \underset{\mu_2}{\rightsquigarrow} & \bullet^1 \arrow[r] & \bullet^2 & \bullet^3 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On voit que les mutations d'un carquois Q ne commutent pas

$$\mu_1\mu_2(Q) \neq \mu_2\mu_1(Q) .$$

b)

$$\begin{tikzcd}
& & & \bullet_5 & & & & & \bullet_5 \\
\bullet_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet_2 \arrow[r] & \bullet_3 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ll, bend right] & \underset{\mu_2}{\rightsquigarrow} & & \bullet_1 \arrow[rr, bend left] & \bullet_2 \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & \bullet_3 \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & \bullet_4 & & & & & \bullet_4
\end{tikzcd} .$$

Il suit de la définition que la mutation est un processus local. De plus, il serait intéressant de savoir ce qui arriverait si on appliquait une mutation plusieurs fois consécutives à un même sommet.

Lemme 2.6. *Pour tout carquois Q, on a $\mu_k^2(Q) = Q$. En d'autres termes, la mutation est involutive.*

Démonstration. Soit Q un carquois. Notons que la mutation est un processus local. Ainsi, si $\mu_k^2 = \mathbb{1}$ pour toutes les flèches incidentes à k et tous les sommets voisins de k, ce qu'on appelle le voisinage de k, alors on peut conclure que $\mu_k^2(Q) = Q$. Vérifions donc que $\mu_k^2(Q) = Q$ pour le voisinage de k. En appliquant la définition 2.4, on obtient les étapes suivantes :

(1) On crée une flèche $i \to j$ pour chaque chemin de longueur 2 de la forme $i \to k \to j$. Soit n le nombre de flèches $i \to j$ ainsi obtenues, alors $n \geq 0$.

(2) On inverse toutes les flèches incidentes à k.

(3) On enlève tous les 2-cycles créés par l'étape 1. Soit m le nombre de flèches $j \to i$. Si $0 \leq m \leq n$, il reste alors $n-m$ flèches $i \to j$. Si $m > n$, il reste $m-n$ flèches $j \to i$.

(4) La deuxième mutation crée une flèche $i' \to j'$ pour chaque paire de flèches $i' \to k \to j'$. Or, les flèches ainsi créées seront des flèches $j \to i$, ceci étant attribuable à l'étape 2, et il y en aura exactement n.

(5) On inverse toutes les flèches incidentes à k. Or, puisqu'on les avait déjà inversées à l'étape 2, l'étape 5 redonne exactement les mêmes flèches que dans Q.

(6) Il ne reste plus qu'à enlever les 2-cycles créés à l'étape 4. Si on avait $m > n$, on a vu à l'étape 3 qu'il resterait $m-n$ flèches $j \to i$. Or, on vient de créer n flèches $j \to i$ à l'étape 4. Il y a donc $m-n+n=m$ flèches $j \to i$, soit le même nombre que dans Q. Si $m \leq n$, on a vu qu'il resterait $n-m$ flèches $i \to j$. Or, comme on vient de créer n flèches $j \to i$, il nous resterait $n-(n-m)=m$ flèches $j \to i$ après la suppression des 2-cycles. Ce nombre est le même que dans Q. Ainsi, $\mu_k^2(Q) = Q$.

□

La mutation de carquois permet de transformer un carquois Q en un nouveau carquois Q'. De même, la mutation d'amas permet de transformer un amas X en un autre amas X' en ne changeant qu'une variable à la fois. On appelle **amas** un ensemble de n générateurs algébriquement indépendants du corps ambiant $\mathcal{F}$, obtenu par une suite de mutations (au sens ci-bas) à partir de l'amas initial.

Définition 2.7.
Considérons l'amas $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La **mutation** μ_k d'un amas X en une variable x_k transforme X en un nouvel amas $X' = \mu_k(X) = (X \setminus \{x_k\}) \cup \{{x_k}'\}$, où

$$ {x_k}' = \frac{1}{x_k} \left(\prod_{\{\alpha | b(\alpha)=k\}} x_{b(\alpha)} + \prod_{\{\beta | s(\beta)=k\}} x_{s(\beta)} \right) . $$

On convient que le produit vide vaut 1. Notons que la nouvelle variable x_k' appartient au corps ambiant $\mathcal{F}$. Muter un amas revient donc à transformer une des variables de cet amas. De plus, selon la définition, cette transformation dépend de l'orientation du carquois sur lequel on mute et, comme pour les carquois, il s'agit d'une opération locale.

Exemple 2.8.

a) Soit Q le carquois $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ et $\{x_1, x_2, x_3\}$ l'amas initial. Appliquant μ_2 à cet amas, on a que x_1 et x_3 sont inchangées alors que x_2

devient $x'_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{x_2}$. Le carquois est devenu

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend left] & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad .$$

b) Soit Q' le carquois 1 à un seul sommet et sans flèches, et l'amas initial $X' = \{x_1\}$. Appliquant μ_1 à cet amas, on a que x_1 devient $x'_1 = \dfrac{2}{x_1}$. Le carquois est inchangé par cette mutation. En appliquant μ_1 à notre nouvel amas, on obtient que x'_1 devient $x''_1 = x_1$.

Lemme 2.9. *La mutation de variables est involutive.*

Démonstration. Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un amas. En appliquant $\mu_k(X)$, on obtient $X' = \{x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n\}$. De plus, en appliquant $\mu_k(X')$ on obtient $X'' = \{x_1, \ldots, x''_k, \ldots, x_n\}$. Ainsi, il suffit de démontrer que $x''_k = x_k$ pour obtenir que $X'' = X$ et donc que la mutation de variables est involutive. Or, en appliquant la définition, on obtient

$$\begin{aligned}
x''_k &= \frac{1}{x'_k}\left(\prod_{\{\alpha | b(\alpha)=k\}} x_{b(\alpha)} + \prod_{\{\beta | s(\beta)=k\}} x_{s(\beta)} \right) \\
&= \frac{x_k}{\displaystyle\prod_{\{\alpha | b(\alpha)=k\}} x_{b(\alpha)} + \prod_{\{\beta | s(\beta)=k\}} x_{s(\beta)}} \left(\prod_{\{\alpha | b(\alpha)=k\}} x_{b(\alpha)} + \prod_{\{\beta | s(\beta)=k\}} x_{s(\beta)} \right) \\
&= x_k \quad .
\end{aligned}$$

□

2.3. Algèbres amassées sans coefficients

Les algèbres amassées sans coefficients sont définies à partir d'un carquois initial et d'un amas initial auxquels on applique des mutations.

Définition 2.10.
On appelle **graine initiale** une paire (X, Q) où $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un amas dit initial et Q est un carquois. Une **graine** G dans $\mathcal{F}$ est une paire (X', Q'), où Q' est le carquois obtenu de Q par une suite de mutations du carquois initial Q et $X' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ est l'ensemble de n variables obtenues de l'amas initial X par la même suite de mutations. On voit que X' est un amas tel que défini précédement.

Afin de représenter une graine (X, Q), on associe au sommet i de Q la variable x_i de X. Ainsi, on obtient un carquois dont l'ensemble des sommets Q_0 est indexé par les variables de l'amas X. Ainsi,

$$\begin{tikzcd} & & & x_5 \\ x_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & x_2 \arrow[r] & x_3 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ll, bend right] & \\ & & & x_4 \end{tikzcd}$$

est une graine associée au carquois

$$\begin{tikzcd} & & & \bullet_5 \\ \bullet_1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \bullet_2 \arrow[r, "\delta"] & \bullet_3 \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\epsilon"'] \arrow[ll, bend right, "\gamma"'] & \\ & & & \bullet_4 \end{tikzcd} .$$

Définition 2.11.
Soit l'amas initial $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et soit $X_\alpha = \mu_{1_\alpha}\mu_{2_\alpha}\ldots\mu_{t_\alpha}(X)$ l'amas obtenu par la suite de mutations $\mu_{1_\alpha}\mu_{2_\alpha}\ldots\mu_{t_\alpha}$. Alors $\bigcup\limits_\alpha X_\alpha$ est **l'ensemble de toutes les variables amassées.** On définit alors **l'algèbre amassée** $\mathscr{A} = \mathscr{A}(X, Q) = \mathbb{Z}[\bigcup X_\alpha]$ comme étant l'anneau des polynômes à coefficients entiers en les variables amassées, muni des opérations usuelles des polynômes et du produit usuel par un entier.

En résumé, on considère l'ensemble de toutes les variables amassées obtenues par suite de mutations comme ensemble de générateurs de notre algèbre. De cet ensemble de variables, on obtient tous les polynômes possibles à coefficients entiers. Chaque polynôme est alors un élément de l'algèbre amassée. Chaque algèbre amassée dépend uniquement de la graine initiale.

Exemple 2.12.

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\mu_2"'] & x_2 \arrow[r, squiggly, "\mu_1"'] & \frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r, squiggly, "\mu_2"'] & \frac{1+x_2}{x_1} \arrow[r] & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[d, squiggly, "\mu_1"] \\ x_1 & \frac{1+x_1}{x_2} \arrow[l] \arrow[r, phantom, "="] & \frac{1+x_1}{x_2} \arrow[r] & x_1 & \frac{1+x_1}{x_2} \arrow[l, squiggly, "\mu_2"'] & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Puisque la mutation est involutive nous avons ici tous les cas possibles de suites de mutations. Ainsi, on obtient l'algèbre amassée suivante :

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}(\{x_1, x_2\}, 1 \to 2) = \mathbb{Z}\left[x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right]$$

Un élément de $\mathscr{A}$ pourrait alors être, par exemple :

$$18\left(\left(\frac{1+x_2}{x_1}\right)^6 + \left(\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right)^{17}\right) .$$

2.4. Mutations de matrices

Avant de parler du lien entre carquois et matrices, rappelons que la **matrice transposée** d'une matrice carrée $B_n = [b_{ij}]_n$ d'ordre n sur un anneau K est la matrice

$$B_n^T = [b'_{ij}]_n \text{ , où } b'_{ij} = b_{ji}.$$

Transposer une matrice revient à échanger la i^e ligne avec la j^e colonne. De plus, une matrice **antisymétrique** est une matrice B_n carrée à coefficients dans K telle que

$$B_n^T = -B_n,$$

ce qui équivaut, si $B_n = [b_{ij}]$, à dire que $b_{ii} = 0$ pour tout i et $b_{ij} = -b_{ji}$ pour $i \neq j$. Il est possible d'associer un carquois à une matrice anti-symétrique. Le nombre de lignes (ou de colonnes) est égal au nombre de sommets du carquois. Le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient de la matrice est le nombre de flèches allant du sommet i au sommet j. S'il y a des flèches allant plutôt du sommet j au sommet i, on prend encore le nombre de flèches de j vers i, mais précédé d'un signe négatif.

Proposition 2.13. *Il existe une bijection ϕ entre l'ensemble des carquois (sans boucles ni 2-cycles) et celui des matrices antisymétriques à coefficients entiers. Celle-ci est donnée par*

$$\phi : \quad Q \quad \mapsto \quad B_n = [b_{ij}]_n$$

où b_{ij} est le nombre de flèches allant de i vers j dans Q.

Démonstration. Soit Q un carquois. On définit une fonction f de l'ensemble des carquois sans boucles ni 2-cycles vers l'ensemble des matrices antisymétriques de dimensions $n \times n$, où $n = |Q_0|$, par $f(Q) = [b_{ij}]$, où b_{ij} est le nombre de flèches allant de i vers j dans Q, et une fonction g de l'ensemble des matrices antisymétriques de dimensions $n \times n$ vers l'ensemble des carquois sans boucles ni 2-cycles par $g([b'_{ij}]) = Q'$, où $[b'_{ij}]$ est une matrice antisymétrique et Q' est le carquois obtenu en plaçant b'_{ij} flèches allant du sommet i au sommet j. En apppliquant $f(Q)$, on obtient une matrice B dont la diagonale est constituée de 0 puisque le carquois Q est sans boucles. De plus, en se référant à la définition de f, on constate que la matrice sera antisymétrique. Il est donc possible d'appliquer $g(B)$. Or, $g(B)$ nous donne un carquois Q' qui sera sans boucles ni 2-cycles, puisque la diagonale principale de B est nulle et que la matrice est antisymétrique. Finalement, en vertu de la définition des fonctions f et g, le nombre de flèches allant de i à j sera le même dans Q' que dans Q. Il est alors facile de vérifier que $g(f(Q)) = Q$ et $f(g([b_{ij}])) = [b_{ij}]$. $\square$

Exemple 2.14. Au moyen de la bijection de la proposition 2.13, le carquois

$$\begin{tikzcd} & & & \bullet_5 \\ \bullet_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet_2 \arrow[r] & \bullet_3 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ll, bend right] & \\ & & & \bullet_4 \end{tikzcd}$$

s'applique sur la matrice $B \in M_{5\times 5}(\mathbb{Z})$,

$$\text{où } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme il est possible de muter les carquois, il est aussi possible de muter les matrices antisymétriques.

Proposition 2.15.

a) Soit $B_n = [b_{ij}]_n$ une matrice associée à un carquois. On a alors que les éléments de la matrice obtenue par une mutation en k sont

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \textit{si } k = i \textit{ et } k = j \\ b_{ij} + \dfrac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

b) Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'amas initial. Alors on a que $\mu_k(X) = X' = (X \backslash \{x_k\}) \cup \{x'_k\}$, où

$$x'_k = \frac{\displaystyle\prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}}{x_k} .$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit de la traduction en termes de matrices de la mutation de carquois. □

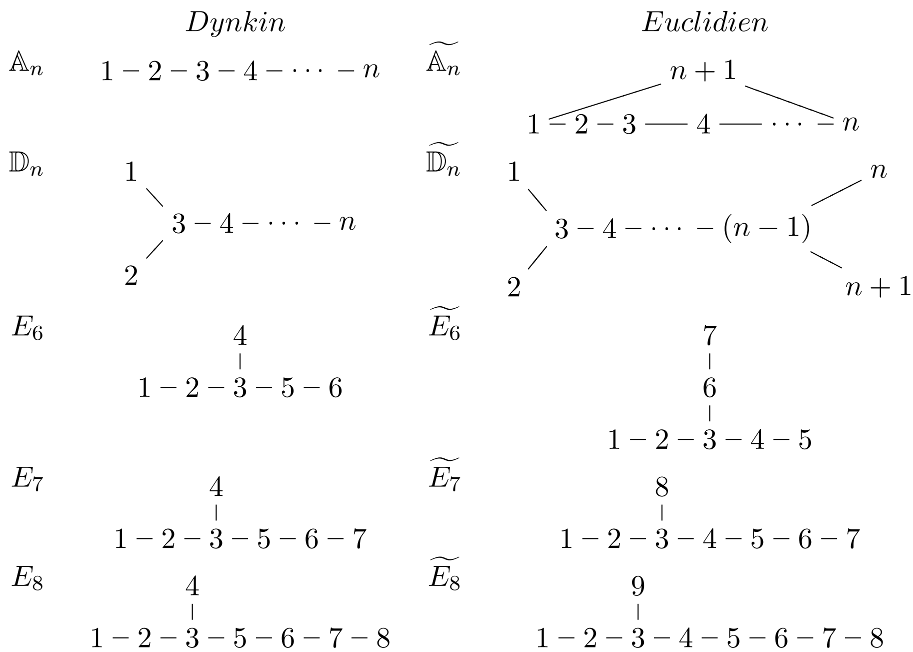
On sait que les algèbres amassées sont définies par un ensemble de générateurs. Or, tel que discuté précédement, cet ensemble peut être soit fini, soit infini. Fomin et Zelevinsky ont classifié les algèbres amassées dont l'ensemble de générateurs est fini [**FZ03**].

2.5. Classification des algèbres amassées de type fini

Définition 2.16.
Une algèbre amassée est dite **de type fini** si l'ensemble de ses variables amassées est fini.

Comme les algèbres amassées dépendent uniquement du choix de la graine initiale, il est raisonnable de penser que le choix du carquois Q de notre graine initiale pourrait influer sur le fait que l'algèbre amassée soit de type fini ou pas.

Définition 2.17.
Les **carquois de type Dynkin et Euclidien** sont les carquois dont le graphe sous-jacent est de l'un des types suivants :



Théorème 2.18. *Une algèbre amassée $\mathscr{A}(X,Q)$ est de type fini si et seulement si une de ses graines a le carquois dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin.*

Démonstration. Pour une preuve de ce théorème, on réfère le lecteur à [**FZ03**]. □

3. Résultats importants

Cette section présentera notre résultat principal sur les algèbres amassées, ainsi qu'une conjecture sur les variables amassées

3.1. Phénomène Laurent

L'un des aspects les plus surprenants de la théorie des algèbres amassées est ce qu'on appelle le phénomène Laurent.

Définition 3.1.
Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un ensemble de variables.
L'ensemble des **polynômes de Laurent** en ces variables est l'anneau

$$\mathbb{Z}\left[x_1, x_2, ..., x_n, {x_1}^{-1}, {x_2}^{-1}, ..., {x_n}^{-1}\right].$$

Il s'agit de toutes les expressions de la forme

$$p = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k {x_1}^{m_{1,k}} {x_2}^{m_{2,k}} \cdots {x_n}^{m_{n,k}},$$

où les $m_{i,k}$ sont des entiers et où les $a_k \neq 0$ pour un nombre fini de k entiers. Puisque la somme et le produit de polynômes de Laurent sont des polynômes de Laurent, cet ensemble est un sous-anneau du corps ambiant $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Notons qu'en ramenant à un dénominateur commun, on voit que tout polynôme de Laurent s'écrit sous la forme

$$p = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k {x_1}^{p_{1k}} {x_2}^{p_{2k}} \cdots {x_n}^{p_{nk}}}{{x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2} \cdots {x_n}^{s_n}}$$

avec les p_{ik} et les s_i des entiers positifs et les $b_k \neq 0$ seulement pour un nombre fini de k.

Exemple 3.2. Soit $X = \{x_1\}$. Alors

$$p = \frac{1}{x_1}$$

est un polynôme de Laurent n'appartenant pas à l'algèbre amassée de type $\mathbb{A}_1$. En effet, si on veut que ce polynôme soit dans l'algèbre amassée, il devrait être égal à une expression de la forme

$$\sum_{n,m} a_{n,m}\ x_1^n \left(\frac{2}{x_1}\right)^m = \sum_{n,m} a_{n,m}\ 2^m\ x_1^{n-m},$$

avec $n, m \geq 0$. Or, si cette expression égale p, on doit avoir $n - m = -1$. Mais alors, si $n - m = -1$, on obtient que $m \geq 1$ ce qui contredit l'égalité entre le numérateur de cette expression et celui de p. Cependant,

$$\begin{aligned} p' &= 3\left(\frac{2}{x_1}\right)^2 + 4x_1^{13} \\ &= \frac{12 + 4x_1^{15}}{x_1^2} \end{aligned}$$

est un polynôme de Laurent appartenant à l'algèbre amassée de type $\mathbb{A}_1$.

Grâce à la définition 3.1, il est possible d'énoncer un théorème central des algèbres amassées. Ce théorème fut l'un des premiers prouvés par Fomin et Zelevinsky [**FZ02**] et a grandement contribué à l'intérêt que l'on porte à cette classe d'algèbres.

Théorème 3.3. *Soit* $(Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}, Q_Y)$ *une graine quelconque d'une algèbre amassée* $\mathscr{A}$. *Alors toute variable amassée s'écrit comme polynôme de Laurent en les variables* $y_1, y_2, \ldots, y_n$. *En particulier,*

$$\mathscr{A} \subseteq \mathbb{Z}\left[y_1, \ldots, y_n, {y_1}^{-1}, ..., {y_n}^{-1}\right].$$

Démonstration. Pour une preuve de ce théorème, on réfère le lecteur à l'article [**FZ02**] de Fomin et Zelevinsky. □

3.2. Conjecture de positivité

Soient $p(x) = \sum_i p_i x^i$, $q(x) = \sum_i q_i x^i$ et $r(x) = \sum_i r_i x^i$, des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x).$$

Il est facile de voir que même si tous les p_i et tous les q_i sont non-négatifs, alors les r_i peuvent être négatifs. En effet, on pourrait considérer le cas où $p(x) = x^3 + 1$ et $q(x) = x + 1$. On aurait alors que $r(x) = x^2 - x + 1$.

Les variables amassées sont des polynômes de Laurent, et les exemples précédents montrent que les coefficients de ces polynômes sont des entiers positifs. Il serait utile de savoir si c'est toujours le cas et pourquoi. Ce problème est encore ouvert dans certains cas et fait présentement l'objet d'une conjecture.

Conjecture de positivité. *Soit $(Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}, Q_Y)$ une graine quelconque d'une algèbre amassée $\mathscr{A}$. Alors toute variable amassée est dans $\mathbb{Z}_{\geq 0}\left[y_1, \ldots, y_n, {y_1}^{-1}, \ldots, {y_n}^{-1}\right]$. C'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme*

$$\frac{\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} b_k {y_1}^{p_{1k}} \cdots {y_n}^{p_{nk}}}{{y_1}^{s1} \cdots {y_n}^{sn}} \text{ , avec } b_k \geq 0 \text{ .}$$

La conjecture a été démontrée par Musiker, Schiffler et Williams en 2009, [**MSW09**], pour toute algèbre amassée provenant d'une surface marquée. Cela inclut les algèbres amassées des types :

$$\mathbb{A}_n \;,\;\; \mathbb{D}_n \;,\;\; \tilde{\mathbb{A}}_n \;,\;\; \tilde{\mathbb{D}}_n .$$

On réfère à [**Dou11**] pour de l'information sur les surfaces marquées.

4. Algèbres amassées avec coefficients

Les deux premières sections ont présenté des propriétés des algèbres amassées sans coefficients. Or, ces algèbres sont un cas particulier des algèbres amassées avec coefficients. Dans cette dernière section, nous présentons cette classe plus large d'algèbres amassées.

4.1. Définitions initiales

Puisque les algèbres amassées avec coefficients généralisent celles sans coefficients, nous ne donnerons que les définitions différentes ou nouvelles par rapport à celles vues en 2.1. De plus, il faudra généraliser la notion de mutation.

Notation 4.1. *Soit Q un carquois et $i, j \in Q_0$. On note $Q_1(i, j)$ l'ensemble des flèches de Q_1 allant de i vers j.*

Définition 4.2.
Un **carquois gelé** est une paire (Q, F), où Q est un carquois et F est un sous-ensemble de Q_0 tel que pour tous i, j dans F, il n'existe aucune flèche entre i et j dans Q_1. Les éléments de F sont appelés **sommets gelés**.

En posant $F = \emptyset$, on voit que la paire $(Q, F) = (Q, \emptyset)$ est en fait un carquois tel que défini à la section 2.1.

Définition 4.3.
Soit Q un carquois. On note $\hat{Q} = (\hat{Q}_0, \hat{Q}_1, s, b)$ le carquois défini par :

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}_0 &= Q_o \cup Q'_o \text{ où } Q'_0 = \{i' | i \in Q_0\} \\
\hat{Q}_1(i,j) &= \begin{cases} Q_1(i,j) & \text{si } i,j \in Q_0 \\ \{j' \to j\} & \text{si } j \in Q_0 \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Le carquois gelé $(\hat{Q}, Q'_0)$, est appelé **l'extension principale** de Q.

Dans la suite de cette section, un sommet encadré représentera un sommet gelé.

Exemple 4.4. Soit $Q = \ 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. Alors l'extension principale de Q est

$$
(\hat{Q}, Q'_0) \quad = \quad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \\
\boxed{1'} \arrow[u] & \boxed{2'} \arrow[u] & \boxed{3'} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

4.2. Mutation de carquois gelés

Comme pour les algèbres amassées sans coefficients, il faut se doter d'une notion de mutation permettant de générer un ensemble de générateurs pour nos algèbres amassées avec coefficients. Cette notion sera une légère modification de celle définie en 2.4.

Définition 4.5.
Soit (Q, F) un carquois gelé et i un sommet non-gelé. La **mutation** $\mu_i(Q, F)$ **dans la direction** i de (Q, F) transforme le carquois (Q, F) en un nouveau carquois gelé $\mu_i(Q, F) = (Q', F)$ obtenu par :

(1) On mute en i selon la mutation usuelle ;

(2) On retire toute flèche créée entre 2 sommets gelés.

Bref, muter un carquois gelé revient à muter un carquois standard avec la restriction qu'il ne doit pas y avoir de flèches entre les sommets gelés. On peut à nouveau remarquer que si F est l'ensemble vide, alors la mutation de carquois gelés est la même que la mutation usuelle.

Lemme 4.6. *Soit (Q, F) un carquois gelé. La mutation de carquois gelés est une involution, c'est-à-dire que $\mu_k^2(Q, F) = (Q, F)$.*

DÉMONSTRATION. La preuve du lemme 2.6 s'applique avec les modifications évidentes. $\square$

Voici un exemple de mutation appliquée à un carquois gelé.

Exemple 4.7.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{4} \arrow[d] & \\
\boxed{5} & 1 \arrow[l] \arrow[r] & 2 \arrow[dl] \\
 & 3 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\quad \overset{}{\underset{\mu_1}{\rightsquigarrow}} \quad
\begin{tikzcd}
 & \boxed{4} \arrow[dr] & \\
\boxed{5} \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[d] & 2 \arrow[l] \\
 & 3 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Remarque. On définit le type Dynkin ou Euclidien d'un carquois gelé comme étant le type Dynkin ou Euclidien de sa partie non-gelée. Ainsi, le carquois de l'exemple précédent était de type $\mathbb{A}_3$.

4.3. Matrices et carquois gelés

De manière analogue à ce qui a été fait pour les carquois, il est possible d'associer une matrice à un carquois gelé.

Proposition 4.8. *Il existe une bijection f entre l'ensemble des carquois gelés à $n+m$ sommets dont m sont gelés et celui des matrices de dimension $(n+m)\times m$ à coefficients entiers, celle-ci étant donnée par*

$$f: \quad (Q,F) \quad \longmapsto \quad \tilde{B}_{(Q,F)}$$

où $\tilde{B}_{(Q,F)}(i,j) = |Q_1(i,j)| - |Q_1(j,i)|$.

Démonstration. La preuve de la proposition 2.13 s'applique avec les modifications évidentes. □

Exemple 4.9. Le carquois

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{4} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \arrow[dl] \\
 & 3 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

est associé à la matrice

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarque. Si $F = \emptyset$, alors la matrice associée à (Q,F) est une matrice antisymétrique.

4.4. Graines avec coefficients et leurs mutations

Les algèbres amassées avec coefficients sont définies sur le même corps ambiant que celles sans coefficients. On rappelle au lecteur que le corps utilisé est celui des fonctions rationnelles sur l'ensemble des variables initiales. De plus, si on considère un carquois gelé (Q,F), on convient que si $Q_0 = \{1,\ldots,n,n+1,\ldots,n+m\}$, alors $F = \{n+1,\cdots,n+m\}$.

Définition 4.10.
Une **graine avec coefficients** est un triplet $\Sigma = (X,Y,(Q,F))$, où :
- (Q,F) est un carquois gelé ;
- $X = \{x_1,\cdots,x_n\}$ est un n-tuplet de variables associées aux sommets non-gelés de Q ;
- $Y = \{y_1,\cdots,y_m\}$ est un m-tuplet de variables associées aux sommets gelés de F.

X est appelé **l'amas de la graine** Σ et les éléments de X sont les variables non-gelées tandis que Y est appelé **l'ensemble de variables gelées de** Σ.

Soit $\Sigma = \left((x_1), (x_2, x_3),\ \boxed{2} \longrightarrow 1 \longleftarrow \boxed{3}\right)$ une graine avec coefficients. On la représente comme suit :

$$\boxed{x_2} \longrightarrow x_1 \longleftarrow \boxed{x_3}$$

Comme pour les graines sans coefficients, il est possible de muter une graine avec coefficients. La définition est semblable.

Définition 4.11.
Soit $\Sigma = (X, Y, (Q, F))$. Alors, pour tout i dans $Q_0 \backslash F$, la mutation de Σ en i, est $\mu_i(\Sigma) = (X', Y, \mu_i(Q, F))$, où $X' = (X \backslash \{x_i\}) \cup \{x'_i\}$ avec

$$x_i x'_i = \prod_{\{\alpha | s(\alpha) = k\}} x_{b(\alpha)} + \prod_{\{\beta | b(\beta) = k\}} x_{s(\beta)}.$$

Reprenons la graine de l'exemple précédant pour lui appliquer une mutation. Soit $\Sigma = \left((x_1), (x_2, x_3),\ \boxed{2} \longrightarrow 1 \longleftarrow \boxed{3}\right)$. La mutation de Σ en 1 donne alors

$$\mu_1(\Sigma) = \left((x'_1), (x_2, x_3),\ \boxed{2} \longleftarrow 1 \longrightarrow \boxed{3}\right)$$

où :

$$x'_1 = \frac{1 + x_2 x_3}{x_1}.$$

4.5. Algèbres amassées avec coefficients

Par analogie avec les algèbres amassées sans coefficients, on définit l'algèbre amassée associée à une graine avec coefficients Σ. Comme à la définition 2.11, on note $\bigcup_\alpha X_\alpha$ l'ensemble de toutes les variables amassées. Notons que les algèbres amassées avec coefficients sont aussi définies sur le corps ambient $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_{n+m})$.

Définition 4.12.
L'algèbre amassée avec coefficients associée à $\Sigma = (X, Y, (Q, F))$, notée $\mathscr{A}_\Sigma$ est :

$$\mathscr{A}_\Sigma = \mathbb{Z}\left[y^{\pm 1} \mid y \in Y\right]\left[\ \bigcup X_\alpha\ \right].$$

Bref, il s'agit de toutes les fractions rationnelles à coefficients entiers formées de variables amassées et de variables gelées.

Exemple 4.13. Soit $\Sigma = \left((x_1), (x_2, x_3),\ \boxed{2} \longrightarrow 1 \longleftarrow \boxed{3}\right)$.

$$\boxed{x_2} \longrightarrow x_1 \longleftarrow \boxed{x_3} \qquad \overset{}{\underset{\mu_1}{\rightsquigarrow}} \qquad \boxed{x_2} \longleftarrow \frac{1 + x_2 x_3}{x_1} \longrightarrow \boxed{x_3}\ .$$

Comme la mutation est involutive, et qu'on ne peut pas muter sur les sommets gelés, on a obtenu toutes les variables amassées associées à Σ. Ainsi,

$$\bigcup X_\alpha = \{x_1, \frac{1+x_2x_3}{x_1}\} \quad \text{et } \mathscr{A}_\Sigma = \mathbb{Z}\left[x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}\right]\left[x_1, \frac{1+x_2x_3}{x_1}\right]$$
$$= \mathbb{Z}\left[x_1, x_2, x_3, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1+x_2x_3}{x_1}\right].$$

4.6. Changement de coefficients

Depuis le début de cette section, on voit que les algèbres amassées sans coefficients ressemblent à celles avec coefficients. Or, il existe un morphisme permettant de passer d'un type d'algèbre amassée à l'autre. Ce changement fera l'objet de cette dernière section.

Notation 4.14. *Soit (Q, F) un carquois gelé. On note U le carquois obtenu de Q en supprimant les sommets gelés.*

On cherche maintenant à comparer $\mathscr{A}_{(Q,F)}$ avec $\mathscr{A}_U$. Nous aurons besoin au préalable de la notion de morphisme d'anneaux.

Définition 4.15.
Soient A et B des anneaux. Soient $+, \cdot$ et 1 respectivement l'opération additive, multiplicative et le neutre multiplicatif des anneaux, **un morphisme d'anneaux** $f : A \to B$ est une application telle que :
- Pour tous a, b dans A, on a $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
- Pour tous a, b dans A, on a $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ et ;
- $f(1) = 1$.

Grâce à la définition de morphisme d'anneau, on peut définir un morphisme entre les corps ambiants de nos algèbres amassées.

Définition 4.16.
Le **morphisme de spécialisation** ρ est le morphisme d'anneaux défini comme suit

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_{m+n}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n) \\ & x_i & \longmapsto & \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{si } n < i \leq n+m \end{cases} \end{array}$$

Bref, ce morphisme envoie chaque variable gelée sur 1 et chaque variable non-gelée sur elle-même. En particulier, ce morphisme ne crée aucune nouvelle variable amassée. On passe donc d'une algèbre avec $n+m$ variables à une algèbre avec n variables.

Théorème 4.17. *Soient $\Sigma = (X, Y, (Q, F))$ et $\Sigma' = (X, U)$.*
Alors le morphisme de spécialisation induit une bijection $\mathscr{A}_\Sigma \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_{\Sigma'}$.

Démonstration. Pour obtenir une preuve de ce théorème, on réfère le lecteur à [**FZ07**]. □

Exemple 4.18. Soient $(Q,F) = \boxed{2} \longrightarrow 1 \longleftarrow \boxed{3}$ et ρ, le morphisme de spécialisation.

$$\begin{array}{cccc} \rho : & \mathbb{Q}(x_1,x_2,x_3) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(x_1) \\ & x_1 & \longmapsto & x_1 \\ & x_2 & \longmapsto & 1 \\ & x_3 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\{x_1, \frac{1+x_2x_3}{x_1}\} \xrightarrow{\rho} \{x_1, \frac{2}{x_1}\}$$

.

Le morphisme de spécialisation est le lien explicite entre les algèbres amassées sans coefficients et celles avec coefficients.

Références

[Cha11] M. Chabot *Frises et récurrences linéaires*, soumis pour publication dans CaMUS.

[Dou11] G. Douville. *Triangulations, carquois et théorème de Ptolémée*, soumis pour publication dans CaMUS.

[FZ02] S. Fomin et A. Zelevinsky. *Cluster algebras I : Foundations.* J. Amer. Math. Soc., 15 :497-539, 2002.

[FZ03] S. Fomin et A. Zelevinsky. *Cluster algebras II : Finite type classification.* Inventiones Mathematicae, 154 :63-121, 2003.

[FZ07] S. Fomin et A. Zelevinsky. *Cluster algebras IV : Coefficients.* Composition Mathematica, 143(1) :112-164, 2007.

[Ngu06] B. Nguefack. *Introduction aux Algèbres amassées : Définitions et exemples*, Rapports de recherche de l'université de Sherbrooke, 41 :1-33, 2007.

[MSW09] G. Musiker, R. Schiffler et L. Williams. *Positivity for cluster algebras from surfaces*,arXiv :0906.0748.

DAVID BOULET-ST-JACQUES, STAGIAIRE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE, ÉTUDIANT, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UQAM

Courriel: `david.boulet@hotmail.com`