

# FONCTIONS DE FRISES ET ALGÈBRES AMASSÉES

MYRIAM CHABOT

RÉSUMÉ. À partir d'un carquois fini et acyclique  $Q$ , il est possible de construire la répétition  $\mathbb{Z}Q$  de ce carquois et de définir ce que sont les fonctions de frise. En étudiant quelques exemples, on dégagera quelques propriétés des fonctions de frise et on explicitera certains liens existant avec les algèbres amassées et les polynômes continuants signés.

## 1. Introduction

Introduites par Fomin et Zelevinsky au début du 21<sup>e</sup> siècle, les algèbres amassées constituent une branche de la mathématique en plein essor à laquelle se rattachent plusieurs sujets comme la théorie des représentations, les systèmes intégrables et la thermodynamique [Ngu06]. À partir d'un **carquois** fini sans boucles ni 2-cycles  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$  et d'un ensemble de variables  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  appelé **amas initial** et dont les variables sont appelées des **variables amassées**, il est possible d'engendrer de nouveaux carquois et de nouvelles variables amassées à l'aide du concept de **mutation**. En regroupant l'ensemble des variables ainsi formées, en nombre fini ou infini, nous obtenons les générateurs d'une algèbre appelée l'algèbre amassée  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X, Q)$ . L'étude des algèbres amassées a permis d'aboutir à plusieurs résultats tels le phénomène Laurent [FZ02] et la classification des algèbres amassées de type fini [FZ03]. Plusieurs résultats restent à découvrir ou à démontrer, par exemple la conjecture de positivité.

Dans cet article, nous verrons comment il est possible de lier les idées d'algèbres amassées et de frises. Bien que l'élaboration de frises remonte aux grandes civilisations égyptiennes, elles ne sont étudiées comme sujet mathématique que depuis peu [RS08]. Ainsi, en partant d'un carquois  $Q$ , nous pouvons construire la **répétition**  $\mathbb{Z}Q$  de ce carquois. Découle alors de cette construction la notion de **fonction de frise**, qui constitue notre sujet d'intérêt et qui permet d'explorer sous un autre angle les algèbres amassées.

---

Merci à Ibrahim Assem, Thomas Brüstle, Virginie Charette, Grégoire Dupont, Vasilisa Shramchenko et David Smith pour les séminaires sur les algèbres amassées. Merci à David Boulet-St-Jacques, Guillaume Douville et Philippe Dompierre pour les nombreuses discussions qui ont contribué à l'élaboration de cet article. Je remercie également l'ISM pour le financement d'une bourse de premier cycle.

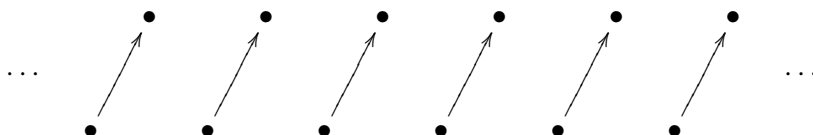
L’objectif de cet article est de dresser la liste de quelques propriétés des fonctions de frises et de leurs liens avec les algèbres amassées. Pour ce faire, nous expliciterons tout d’abord ce que sont les fonctions de frise pour ensuite en étudier quelques-unes qui exposeront certains phénomènes récurrents. En effet, les exemples présentés serviront de point de départ pour dégager certaines propriétés gravitant autour des fonctions de frise, comme la périodicité et la nature de l’ensemble des valeurs générées par une fonction de frise. Puis, nous constaterons que certaines propriétés peuvent être interprétées comme conséquence de résultats sur les algèbres amassées. Finalement, une brève introduction aux polynômes continuants signés permettra d’étudier les fonctions de frise dans le cas particulier d’un carquois dont le graphe sous-jacent est de type  $\mathbb{A}_n$ .

## 2. Définition d’une fonction de frise

Afin d’introduire le concept de fonction de frise, présentons une définition intuitive des frises<sup>1</sup>. Omniprésente dans ce monde, la frise est un motif se répétant sur une surface de longueur infinie, mais de largeur finie et constante. Étant périodique, à chaque frise est associée une longueur minimale  $L$  qui la laisse invariante à la suite d’une translation  $\tau_L$  dans le sens longitudinal [RS08]. Appliquons ce concept aux carquois.

**Notation 2.1.** *Considérons le graphe  $\mathbb{A}_n$ . On notera  $\vec{\mathbb{A}}_n$  le carquois  $\mathbb{A}_n$  linéairement orienté, c’est-à-dire  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n - 1 \rightarrow n$ .*

Pour appliquer la notion de frise aux carquois, prenons l’exemple du carquois  $\vec{\mathbb{A}}_2$  et répétons ce carquois un nombre infini de fois.



Nous avons ainsi obtenu une frise à partir du carquois  $\vec{\mathbb{A}}_2$ . Toujours dans l’optique d’en arriver aux fonctions de frise, tentons de relier chacune de ces copies de carquois tout en conservant la périodicité. Il faut alors définir de nouvelles flèches entre les carquois obtenus. Ceci nous amène à définir la répétition  $\mathbb{Z}Q$  d’un carquois  $Q$  fini et acyclique. Rappelons que pour un carquois  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ ,  $Q_0$  est l’ensemble des sommets,  $Q_1$  est l’ensemble des flèches et  $s$  et  $b$  sont des fonctions  $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$ , où  $s(\alpha)$  représente la source d’une flèche  $\alpha \in Q_1$  et  $b(\alpha)$  son but.

---

1. Pour une présentation plus rigoureuse des frises, voir [BCD11].

**Définition 2.2.**

Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique. Sa **répétition**  $\mathbb{Z}Q$  est le carquois défini par

$$(\mathbb{Z}Q)_0 = \mathbb{Z} \times Q_0 = \{(n, i) \mid n \in \mathbb{Z}, i \in Q_0\}$$

$$(\mathbb{Z}Q)_1 = \{(n, \alpha) : (n, i) \rightarrow (n, j) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha : i \rightarrow j\} \cup \{(n, \alpha') : (n, j) \rightarrow (n - 1, i) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha : i \rightarrow j\} .$$

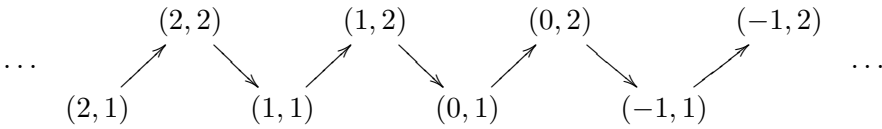
Autrement dit, pour construire la répétition  $\mathbb{Z}Q$  d'un carquois fini et acyclique  $Q$ , on répète le carquois  $Q$  en conservant tous les points et toutes les flèches qui le composent. De plus, dans la  $n^e$  copie de  $Q$ , s'il y a une flèche  $\alpha$  du sommet  $i$  au sommet  $j$ , alors il y aura une flèche  $\alpha'$  du sommet  $j$  de la  $n^e$  copie au sommet  $i$  de la  $n - 1^e$  copie.

**Remarque.** La  $n - 1^e$  copie d'un carquois  $Q$  est celle située dans le sens croissant de la droite réelle, c'est-à-dire celle à droite de la  $n^e$  copie.

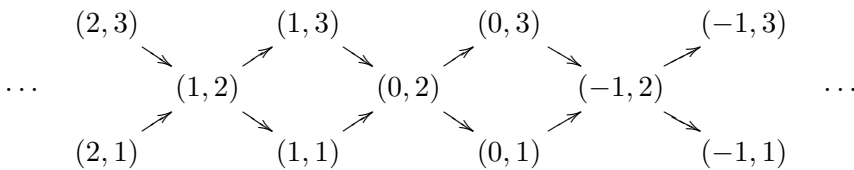
Afin d'illustrer cette définition, voici deux exemples de répétitions de carquois.

**Exemples 2.3.**

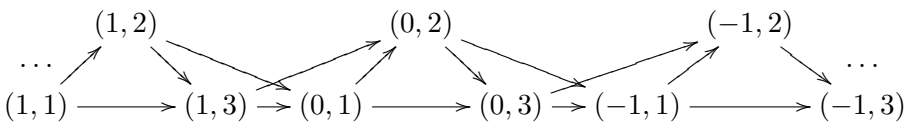
a) Soit  $Q$  le carquois  $\vec{\mathbb{A}}_2$ . Alors la répétition  $\mathbb{Z}Q$  est :



b) Soit  $Q'$  le carquois  $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ . Alors la répétition  $\mathbb{Z}Q'$  est :



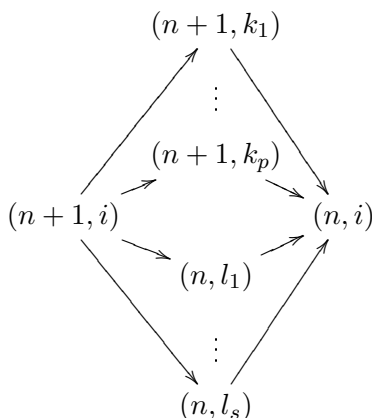
c) Soit  $Q''$  le carquois  $\begin{matrix} & 2 & \\ & \nearrow & \searrow \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{matrix}$ . Alors la répétition  $\mathbb{Z}Q''$  est :



**Définition 2.4.**

À chaque  $(n, i) \in (\mathbb{Z}Q)_0$ , on associe le sous-carquois plein formé de tous les sommets et flèches situés entre le sommet  $(n + 1, i)$  et le sommet  $(n, i)$  inclusivement. Ce sous-carquois est appelé **maille**. Graphiquement, une maille peut être

représentée comme suit :



Ainsi,  $\mathbb{Z}Q$  est formé d'une union de mailles. Maintenant que la construction de  $\mathbb{Z}Q$  a été explicitée, nous pouvons définir ce qu'est une fonction de frise.

**Définition 2.5.**

Soient  $Q$  un carquois fini et acyclique et  $K$  un corps. Une **fonction de frise** est une fonction  $f : (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow K$  telle que pour tout  $(n, i) \in (\mathbb{Z}Q)_0$ , on a

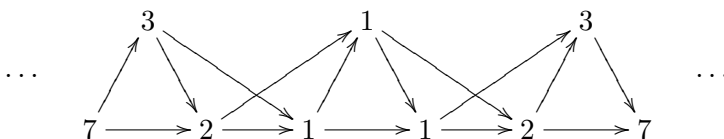
$$f(n, i)f(n + 1, i) = 1 + \prod_{(m, j) \rightarrow (n, i)} f(m, j) .$$

**Remarque.** Le produit est pris sur les flèches. Ainsi, si plus d'une flèche va de  $(m, j)$  à  $(n, i)$ , il faut considérer chacune d'elles.

**Définition 2.6.**

On dit qu'une fonction de frise est **unitaire** si  $f(0, i) = 1$  pour tout  $i$  appartenant à  $Q_0$ .

**Exemple 2.7.** Une fonction de frise unitaire du carquois  $Q''$  des exemples 2.3 est



Avant de poursuivre l'étude des fonctions de frise, nous énoncerons un lemme qui servira à formuler certaines propriétés des fonctions de frise. Il faut d'abord définir ce qu'est une numérotation admissible.

**Définition 2.8.**

Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique tel que  $|Q_0| = n$ . Une **numérotation admissible des sommets selon les puits** est une fonction  $\varphi : Q_0 \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  telle que pour  $\alpha \in Q_1$ , alors  $\varphi(b(\alpha)) < \varphi(s(\alpha))$ .

**Remarque.** Il serait également possible de numérotter les sommets en suivant une **numérotation admissible selon les sources** à la seule différence que l'on aurait  $\varphi(b(\alpha)) > \varphi(s(\alpha))$  pour toute flèche  $\alpha \in Q_1$ .

Tout carquois fini et acyclique possède au moins une numérotation admissible. En effet, un carquois  $Q$  fini et acyclique possède nécessairement au moins un puits. Une fois un puits étiqueté, le sous-carquois restant, également acyclique, possède aussi au moins un puits, et ainsi de suite. Les exemples qui suivent sont tous des carquois dont les sommets sont numérotés admissiblement selon les puits.

**Exemples 2.9.**

- a)  $2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 4 \longrightarrow 3 \longleftarrow 5$
- b)  $4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$
- c)  $5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$   
 $\searrow$   
 $1$

**Lemme 2.10.** Soit une fonction de frise  $f : (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow K$ . Alors  $f$  est uniquement déterminée par ses valeurs sur l'ensemble  $0 \times Q_0 = \{(0, i) | i \in Q_0\}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique dont les sommets sont numérotés admissiblement selon les puits. Supposons que  $f(0, i)$  est connue pour tout  $i \in Q_0$ . Montrons que  $f(n, i)$  est uniquement déterminée pour tout  $i \in Q_0$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On le montrera seulement pour  $n \geq 0$ ; le cas  $n < 0$  est semblable. Le cas  $n = 0$  étant trivial, supposons que  $f(n - 1, j)$  est uniquement déterminée par les  $f(0, i)$ , pour  $i \in Q_0$  et montrons-le pour  $f(n, i)$ . Commençons par  $f(n, 1)$ . Selon la définition, on a que

$$f(n, 1) = \frac{1 + \prod_{(m,j) \rightarrow (n-1,1)} f(m, j)}{f(n - 1, 1)} .$$

Puisque le sommet 1 est un puits de  $Q$ , en raison de la numérotation admissible, alors toutes les flèches entrantes en  $(n - 1, 1)$  proviendront nécessairement de la copie  $n - 1$  du carquois  $Q$ .

Alors

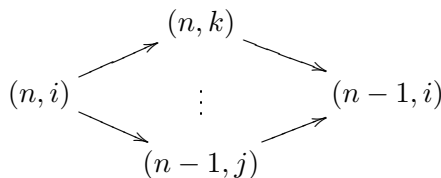
$$\prod_{(m,j) \rightarrow (n-1,1)} f(m, j) = \prod_{(n-1,p) \rightarrow (n-1,1)} f(n - 1, p) ,$$

d'où

$$f(n, 1) = \frac{1 + \prod_{(n-1,p) \rightarrow (n-1,1)} f(n - 1, p)}{f(n - 1, 1)} ,$$

un produit qui est uniquement déterminé par les valeurs de l'ensemble  $0 \times Q_0$  en vertu de l'hypothèse de récurrence sur  $n$ . Supposons alors que  $f(n, k)$  est connue et uniquement déterminée par les valeurs de l'ensemble  $0 \times Q_0$  pour tout  $k < i$ .

En raison de la numérotation admissible, une maille commençant en  $(n, i)$  est de la forme



Selon la définition, on a que

$$\begin{aligned}
 f(n, i)f(n-1, i) &= 1 + \prod_{(m, j) \rightarrow (n-1, i)} f(m, j) \\
 &= 1 + \prod_{(n, k) \rightarrow (n-1, i)} f(n, k) \prod_{(n-1, j) \rightarrow (n-1, i)} f(n-1, j) .
 \end{aligned}$$

Donc  $f(n, i)$  est uniquement déterminée par les  $f(0, i)$ , pour  $i \in Q_0$ . □

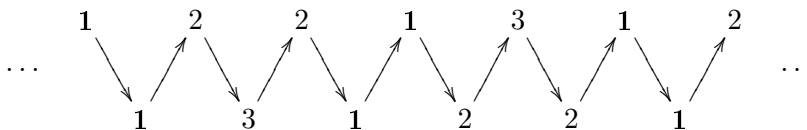
De cette manière, pour construire une fonction de frise, il suffit de donner des valeurs arbitraires aux éléments de l'ensemble  $0 \times Q_0$  et de générer les autres au moyen de la relation de récurrence exposée à la définition 2.5.

### 3. Étude de certaines fonctions de frise

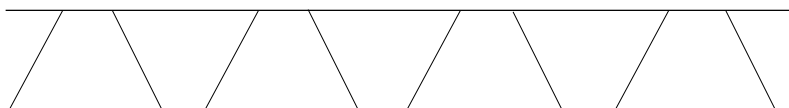
Voici 4 exemples qui seront par la suite étudiés afin d'énoncer certaines propriétés des fonctions de frise.

**Exemples 3.1.**

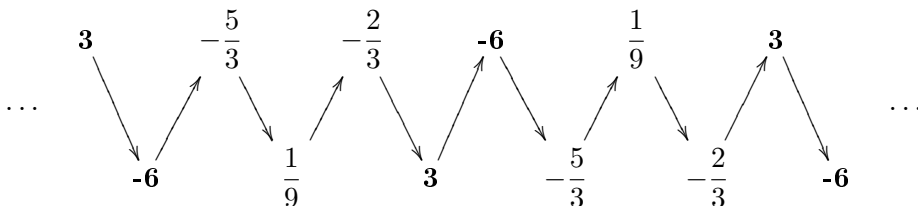
a) Soit  $Q_1$  le carquois  $\vec{A}_2$ . Une fonction de frise unitaire sur  $Q_1$  est



On remarque que l'image de la fonction de frise unitaire de ce carquois ne contient que des **entiers strictement positifs**, c'est-à-dire  $Im(f) \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ . En outre, il semble exister une certaine **périodicité** de forme trapézoïdale qui se répète successivement selon une réflexion à partir de l'axe horizontal de la frise, comme l'indique l'image suivante :

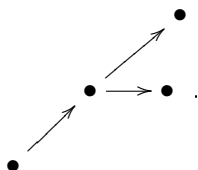


b) Soit  $Q_2$  le carquois  $\vec{\mathbb{A}}_2$ . Posons  $f(0, 1) = 3$  et  $f(0, 2) = -6$ . En fonction de ces valeurs, sa fonction de frise est :

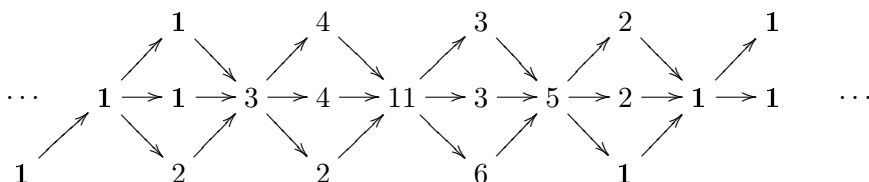


Dans cet exemple, bien qu'il y ait une **périodicité** évoluant de la même manière que celle de l'exemple a), les valeurs de la fonction de frise, qui soulignons-le, n'est pas unitaire, ne sont pas contenues dans l'ensemble des entiers positifs, mais plutôt dans l'ensemble des **rationnels**  $\mathbb{Q}$ .

c) Soit  $Q_3$  le carquois  $\vec{\mathbb{D}}_4$ , c'est-à-dire



Une fonction de frise unitaire est :



Comme dans l'exemple a), on remarque que l'image de la fonction de frise  $f$  n'est constituée que d'**entiers strictement positifs** et qu'il y a une **périodicité** par translation (la fonction de frise est invariante à la suite d'une translation), et non de forme trapézoïdale.

d) Soit  $Q_4$  le carquois de Kronecker :  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ . Une fonction de frise unitaire est :



Dans cet exemple, on voit que les valeurs de la fonction de frise unitaire sont des **entiers strictement positifs**. Par contre, contrairement aux exemples précédents, il ne paraît **pas y avoir de périodicité**, car l'image de la fonction de frise semble strictement croissante en partant de part et d'autre des nombres 1 et les valeurs de cette image sont symétriques de part et d'autre de ces nombres.

Deux thèmes reviennent souvent d'exemple en exemple, soient la périodicité et l'image de la fonction de frise. Tout d'abord, on remarque que pour les exemples  $Q_1$ ,  $Q_3$  et  $Q_4$ , il n'y a que des valeurs entières et positives alors que l'image de la fonction de frise du deuxième exemple est plutôt comprise dans l'ensemble des rationnels. Remarquons que cet exemple est le seul pour lequel la fonction de frise n'est pas unitaire. Y aurait-il un lien ? Le fait d'utiliser une fonction de frise unitaire nous assure-t-il que l'image ne soit constituée que d'entiers positifs ?

Ensuite, en ce qui a trait à la périodicité, seul le dernier exemple ne possède pas cette propriété. En effet, on peut observer que l'image est en fait composée de certains nombres de la suite de Fibonacci, qui, on se le rappelle, est définie par la relation de récurrence  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , avec  $F_0 = F_1 = 1$ . Ainsi, on a

$$\begin{array}{cccccc} F_2 = 2 & F_4 = 5 & F_6 = 13 & F_8 = 34 & F_{10} = 89 & \dots \\ F_3 = 3 & F_5 = 8 & F_7 = 21 & F_9 = 55 & F_{11} = 144 & \dots \end{array}$$

Donc la fonction de frise du carquois de Kronecker correspond à la suite  $F_{2n}$ , c'est-à-dire aux nombres de Fibonacci de rang pair. Or, les nombres de la suite de Fibonacci tendent vers l'infini, donc il ne peut pas y avoir de périodicité. Ainsi, on remarque une périodicité pour les trois premiers carquois, donc l'ensemble image est fini. Par contre, l'image de la fonction de frise est un ensemble infini en ce qui a trait au carquois  $Q_4$ , en raison de l'absence de périodicité. Puisque celui-ci est le seul à ne pas être construit à partir d'un carquois dont le graphe sous-jacent est de Dynkin, y aurait-il un lien entre la périodicité et les carquois issus de graphes de type Dynkin ?

De cette manière, il serait intéressant de catégoriser les situations dans lesquelles on a une fonction de frise d'entiers positifs et/ou périodique. Les prochaines sections élaboreront certains résultats qui permettront d'y parvenir.

## 4. Lien entre les fonctions de frise et les variables amassées

Cette section permettra d'expliquer certaines propriétés des fonctions de frise, et ce, à l'aide du lien qui existe avec les variables amassées. Pour ce faire, on rappelle quelques notions de base sur les algèbres amassées, en suivant les définitions de [Bou11].

Pour une graine  $(X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, Q)$ , la **mutation**  $\mu_k$  en une variable  $x_k$  transforme l'amas  $X$  en un nouvel amas  $X' = \mu_k(X) = \{X \setminus x_k\} \cup \{x_k'\}$ , où

$$x_k' = \frac{1}{x_k} \left( \prod_{\{\alpha|b(\alpha)=k\}} x_{b(\alpha)} + \prod_{\{\beta|s(\beta)=k\}} x_{s(\beta)} \right).$$

De plus, la **mutation d'un carquois**  $Q$  en un sommet  $k$  transforme  $Q$  en un nouveau carquois  $Q' = \mu_k(Q)$  obtenu au moyen des étapes suivantes :

- (1) Pour tout chemin de longueur 2 de type  $i \rightarrow k \rightarrow j$ , on ajoute une flèche du sommet  $i$  vers le sommet  $j$ .
- (2) On renverse le sens de toutes les flèches incidentes à  $k$ .
- (3) On élimine tous les 2-cycles.



**Définition 4.1.**

On appelle **réflexion** une mutation de carquois appliquée à une source ou un puits.

Ainsi, réfléchir un carquois  $Q$  en une source ou un puits  $k$  revient simplement à inverser les flèches incidentes à  $k$ .

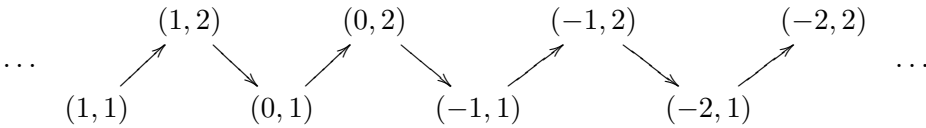
Considérons l’amas initial  $X = (x_1, x_2)$  et la graine initiale  $x_1 \rightarrow x_2$ . Puisque le graphe sous-jacent à ce carquois est  $\mathbb{A}_2$ , alors il y aura 5 variables amassées, car pour un graphe  $\mathbb{A}_n$ , il y a  $n(n + 3)/2$  variables amassées [Ngu06]. On remarque qu’en appliquant uniquement des réflexions à l’unique source du carquois  $\vec{\mathbb{A}}_2$ , on obtient toutes les variables amassées :

$$\begin{aligned} \mu_1(X) &= \{x_1', x_2\} & , \quad \text{où } x_1' &= \frac{1 + x_2}{x_1} \\ \mu_2\mu_1(X) &= \{x_1', x_2'\} & , \quad \text{où } x_2' &= \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1x_2} \\ \mu_1\mu_2\mu_1(X) &= \{x_1'', x_2'\} & , \quad \text{où } x_1'' &= \frac{1 + x_1}{x_2} \end{aligned}$$

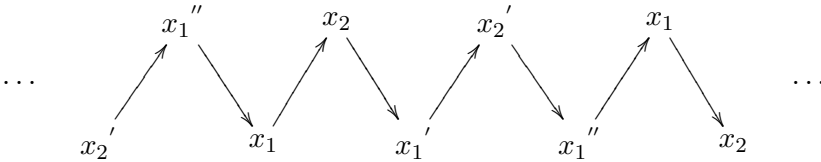
L’algèbre amassée associée au carquois  $\vec{\mathbb{A}}_2$  est alors

$$\mathcal{A}(X, \vec{\mathbb{A}}_2) = \mathbb{Z} \left[ x_1, x_2, \frac{1 + x_2}{x_1}, \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1x_2}, \frac{1 + x_1}{x_2} \right].$$

En observant la répétition  $\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_2$ , on remarque qu’elle est obtenue par une suite de réflexions appliquées à la seule source du carquois  $\vec{\mathbb{A}}_2$ .



Par exemple, en considérant le carquois de départ  $(0, 1) \rightarrow (0, 2)$ , on obtient le carquois  $(0, 2) \rightarrow (-1, 1)$  à la suite d’une mutation appliquée en la source  $(0, 1)$ . Ainsi, en posant  $f(0, i) = x_i$  pour tout  $i \in Q_0$ , on obtient la fonction de frise suivante :



Toutes les variables amassées qui se trouvaient dans  $\mathcal{A}(X, \vec{\mathbb{A}}_2)$  sont dans ce carquois. De cette manière, en plus de calculer des valeurs numériques pour les sommets, les fonctions de frises nous permettent de calculer des variables amassées obtenues par les mutations d’un carquois  $Q$  fini et acyclique, comme l’indique le théorème suivant.

**Théorème 4.2.** Soient  $Q$  un carquois fini et acyclique et  $f : (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  une fonction de frise. On pose  $f(0, i) = x_i$ , pour tout  $i \in Q_0$ . Alors,

- a) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n, i)$  est une variable amassée. Une telle frise est appelée une **frise de variables**.

- b) Si  $Q$  est un carquois dont le graphe sous-jacent est de type Dynkin, alors toutes les variables amassées se retrouvent dans la frise de variables de  $Q$ .

DÉMONSTRATION. Voir, par exemple, [ARS10]. □

En outre, à l'exemple 3.1, nous avons obtenu que les valeurs de la fonction de frise des carquois  $Q_1$ ,  $Q_3$  et  $Q_4$  n'étaient formées que d'entiers positifs. Par ailleurs, il ne s'agissait que de frises unitaires. Voici un énoncé permettant de relier ces deux concepts.

**Corollaire 4.3.** *Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique. Une fonction de frise unitaire de  $Q$  ne contient que des entiers.*

DÉMONSTRATION. En vertu d'un théorème de Fomin-Zelevinsky [FZ02], pour une graine quelconque  $(X = \{x_1, \dots, x_n\}, Q)$  d'une algèbre amassée  $\mathcal{A}$ , toute variable amassée s'écrit comme un polynôme de Laurent en les variables  $x_1, \dots, x_n$ . Donc  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}]$ . En considérant la frise de variables associée à  $Q$ , on sait qu'elle ne contiendra que des variables amassées, qui peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$q = \frac{p(x_1, \dots, x_n)}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}, \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{N} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pour obtenir la frise unitaire associée à  $Q$ , il suffit d'évaluer  $x_i$  en 1, pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ . Ainsi, le dénominateur de  $q$  sera toujours 1, et le numérateur sera un entier. Donc  $q$  est un entier. □

Toutefois, on remarque que le corollaire 4.3 ne nous assure pas que les valeurs d'une fonction de frise unitaire seront des entiers positifs, alors que c'était le cas dans les carquois  $Q_1$ ,  $Q_3$  et  $Q_4$  de l'exemple 3. Ainsi, nous pouvons faire un autre lien avec les variables amassées, plus précisément, la conjecture de positivité. On rappelle que la conjecture de positivité dit que pour une graine quelconque  $(X = \{x_1, \dots, x_n\}, Q_X)$  d'une algèbre amassée  $\mathcal{A}$ , toute variable amassée s'écrit sous la forme

$$\frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k x_1^{p_{1k}} \dots x_n^{p_{nk}}}{x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}}, \text{ avec } b_k \geq 0.$$

Ainsi, cette conjecture nous assurerait que les valeurs d'une fonction de frise unitaire seraient comprises dans les entiers strictement positifs. En 2009, Musiker, Schiffler et Williams ont démontré cette conjecture pour toute algèbre amassée provenant d'une surface marquée [MSW09], ce qui inclut les cas  $\mathbb{A}_n$ ,  $\mathbb{D}_n$ ,  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  et  $\tilde{\mathbb{D}}_n$  [Bou11]. Nous pouvons alors élargir le corollaire 4.3 aux cas dans lesquels la conjecture de positivité a été démontrée.

**Corollaire 4.4.** *Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique provenant d'une surface marquée. Une fonction de frise unitaire de  $Q$  ne contient que des entiers positifs.*

DÉMONSTRATION. Cela suit du corollaire 4.3 et de la conjecture de positivité [MSW09]. □

De plus, dans le cas particulier des carquois dont le graphe sous-jacent est de type  $\mathbb{A}_n$ , il est possible de généraliser ce dernier corollaire. En effet, pour une fonction de frise  $f : (\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_n)_0 \rightarrow \mathbb{Q}$  telle que

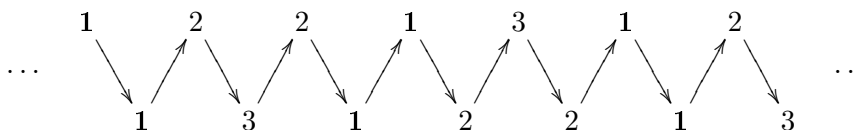
$$\begin{aligned} f(0, i) &\in \mathbb{Z}_{>0} \\ f(0, i) &| f(0, i - 1) + f(0, i + 1) \\ f(0, 1) &| 1 + f(0, 2) \\ f(0, n) &| 1 + f(0, n - 1) , \end{aligned}$$

alors les valeurs de la fonction de frise  $f$  sont des entiers strictement positifs [CC73].

### 5. Récurrences linéaires

Cette section montre comment il est possible de prédire récursivement les valeurs d'une fonction de frise. Pour ce faire, à des fins de simplification, on n'utilisera dans nos exemples que des frises unitaires.

Pour introduire ce concept, reprenons un exemple déjà présenté dans la section 3. On avait le carquois  $Q_1 = \vec{\mathbb{A}}_2$ , que l'on réécrira sous la forme  $a \rightarrow b$ . La fonction de frise unitaire était :



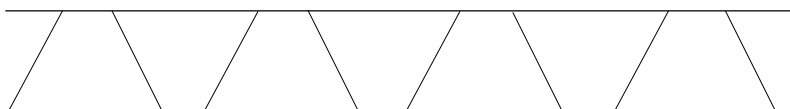
Ainsi, on remarque que pour chaque sommet  $v \in Q_0$ , il y a une suite de nombres  $\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots$  associés à  $v$  dans la fonction de frise. Effectivement, on a la suite  $\dots, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 2, \dots$  pour les valeurs de  $a$  et  $\dots, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 3, \dots$  pour les valeurs de  $b$ . Ceci nous mène à appliquer la notion de récurrence linéaire aux fonctions de frise.

**Définition 5.1.**

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite d'éléments d'un corps  $K$ . Alors la suite satisfait à une **récurrence linéaire** d'ordre  $k$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ , s'il existe des entiers  $\omega_1, \dots, \omega_k$  tels que

$$v_n = \omega_1 v_{n-1} + \omega_2 v_{n-2} + \dots + \omega_k v_{n-k} .$$

On avait remarqué à la section 3 que la périodicité était sous forme trapézoïdale, comme l'indique l'image ci-dessous :



où, dans l'exemple 3.1 a), un trapèze contenait les nombres suivants :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 3 & 1 & \\ 1 & & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Ainsi, dans le cas  $\vec{\mathbb{A}}_2$ , on peut voir que la récurrence linéaire se définit comme suit :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-5} \\ b_n &= b_{n-5} . \end{aligned}$$

En outre, on peut généraliser cette récurrence linéaire à tout carquois  $Q = \vec{\mathbb{A}}_m$ , où  $Q_0 = \{1, 2, \dots, m\}$ . En effet, pour la fonction de frise  $a : (\mathbb{Z}\mathbb{Q})_0 \rightarrow \mathbb{Q}$  et un sommet  $i \in Q_0$ , la récurrence linéaire est :

$$a(n, i) = a(n - (m + 3), i) ,$$

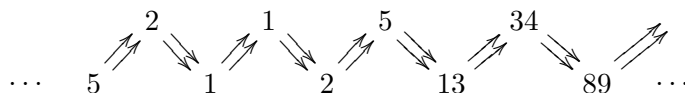
c'est-à-dire

$$a_n^{(i)} = a_{n-(m+3)}^{(i)} .$$

Voici d'autres exemples de fonctions de frise pour lesquelles la récurrence linéaire sera étudiée. Un d'entre eux a déjà été présenté dans la section 3.

**Exemples 5.2.**

- a) Soit le carquois de Kronecker  $Q_4 = a \rightrightarrows b$ . Sa fonction de frise unitaire est alors



On a vu dans l'exemple 3.1 que les nombres obtenus dans la fonction de frise unitaire de  $Q_4$  étaient les nombres de Fibonacci de rang pair. Or, on peut facilement vérifier que les nombres de Fibonacci de rang pair sont donnés par la relation de récurrence  $F_{2n+4} = 3F_{2n+2} - F_{2n}$ , où  $F_0 = F_1 = 1$ . En effet,

$$\begin{aligned} F_{2n+4} &= F_{2n+3} + F_{2n+2} \\ &= 2F_{2n+2} + F_{2n+1} \\ &= 2F_{2n+2} + (F_{2n+2} - F_{2n}) \\ &= 3F_{2n+2} - F_{2n} . \end{aligned}$$

De cette manière, on obtient que

$$\begin{cases} a_n = 3b_{n-1} - a_{n-1} \\ b_n = 3a_n - b_{n-1} \end{cases}$$

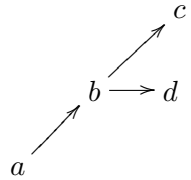
On en déduit que

$$\begin{aligned} a_n &= 3b_{n-1} - a_{n-1} \\ &= 3(3a_{n-1} - b_{n-2}) - a_{n-1} \\ &= 9a_{n-1} - 3b_{n-2} - a_{n-1} \\ &= 9a_{n-1} - (a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-1} \\ &= 7a_{n-1} - a_{n-2} \\ \\ b_n &= 3a_n - b_{n-1} \\ &= 3(3b_{n-1} - a_{n-1}) - b_{n-1} \\ &= 9b_{n-1} - 3a_{n-1} - b_{n-1} \\ &= 9b_{n-1} - (b_{n-1} + b_{n-2}) - b_{n-1} \\ &= 7b_{n-1} - b_{n-2} \end{aligned}$$

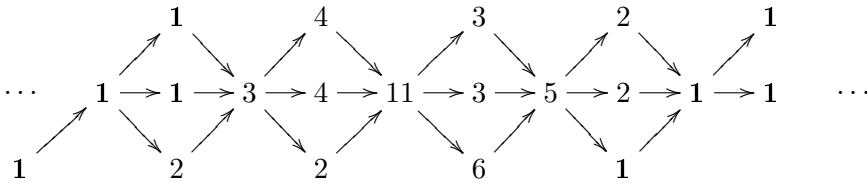
Cela montre que les  $a_n$  et les  $b_n$  satisfont à une récurrence linéaire :

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - a_{n-2} \\ b_n = 7b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases}$$

b) Soit  $Q_3$  le carquois  $\overline{\mathbb{D}}_4$ , c'est-à-dire



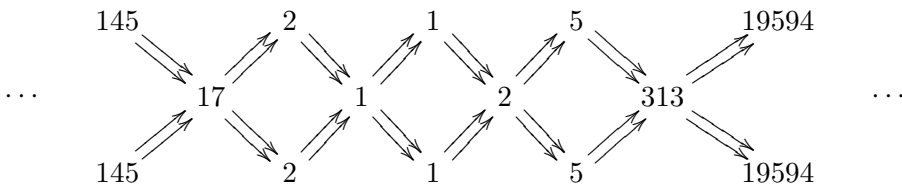
On avait trouvé la fonction de frise unitaire suivante :



On avait remarqué une périodicité par translation, c'est-à-dire que la fonction de frise était invariante à la suite d'une translation spécifique. Ainsi, on obtient la récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} a_n = a_{n-4} \\ b_n = b_{n-4} \\ c_n = c_{n-4} \\ d_n = d_{n-4} \end{cases}$$

c) Soit  $Q_5$  le carquois  $c \Leftarrow a \Rightarrow b$ . Sa fonction de frise unitaire est alors



À première vue, il semble très difficile de trouver une récurrence linéaire dans la frise unitaire de  $Q_5$ . En fait, cela est impossible comme le montre le résultat que nous exposerons à la fin de cette section.

Dans la section 3, l'étude de certaines fonctions de frise avait permis de constater que dans certains cas, il y avait une périodicité. La prochaine proposition détermine pour quels carquois c'est le cas.

**Proposition 5.3.** *Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique. Une fonction de frise de  $Q$  est périodique si et seulement si le graphe sous-jacent de  $Q$  est de type Dynkin.*

DÉMONSTRATION. Cela suit des travaux de Fomin-Zelevinsky [FZ03].  $\square$

Précédemment, nous avons déjà remarqué que pour les carquois dont le graphe sous-jacent était de type  $\mathbb{A}_n$ , la périodicité était de forme trapézoïdale. Conway et Coxeter ont d'ailleurs montré comment s'exprimait cette périodicité.

**Théorème 5.4.** [CC73] *Soit  $Q = \vec{\mathbb{A}}_m$  et  $f : (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow K$  une fonction de frise. Alors  $f(0, i) = f(-i - 1, m + 1 - i)$ .  $\square$*

Le dernier théorème présenté dans cette section permettra d'affirmer s'il y a présence ou non d'une récurrence linéaire seulement en observant le type de carquois. En 2010, les travaux de Assem, Reutenauer et Smith et ceux de Keller et Scherotzke sur la récurrence linéaire ont permis d'arriver à certains résultats à ce sujet.

**Théorème 5.5.** ([ARS10], [KS10]) *Soient  $Q$  un carquois fini et acyclique,  $v$  un sommet de  $Q$  et  $f : (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow \mathbb{Q}$  une fonction de frise. Alors la suite de nombres  $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie une récurrence linéaire si et seulement si  $Q$  est de type Dynkin ou Euclidien.  $\square$*

La nécessité a été prouvée dans [ARS10] en utilisant les concepts de fonctions additives et sous-additives. D'ailleurs, il a également été démontré que pour une fonction de frise  $f : \mathbb{Z}Q_0 \rightarrow \mathbb{Q}$ , celle-ci était bornée si  $Q$  était de type Dynkin et non-bornée dans le cas où  $Q$  était de type Euclidien ([ARS10], **Theorem 1**). En ce qui a trait à la suffisance, le cas Dynkin est trivial en raison de la proposition 5.3. Puis, Assem, Reutenauer et Smith ont prouvé les cas  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  et  $\tilde{\mathbb{D}}_n$  de manière combinatoire. Il s'agissait d'une conjecture dans les autres cas. Par contre, en ayant recours à une autre méthode, Keller et Scherotzke ont réussi à le démontrer pour tous les cas de type Euclidien [KS10].

On déduit du théorème précédent qu'il n'y aura pas de récurrence linéaire pour l'exemple 5.2 c), car le graphe sous-jacent n'est ni de type Dynkin ni de type Euclidien.

## 6. Polynômes continnants signés

Cette section présentera un lien qui existe entre les fonctions de frise et les polynômes continnants signés.

### Définition 6.1.

Soit  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  une famille infinie de variables. Le  $n^e$  **polynôme continuant signé**, ou **polynôme de Tchebychev généralisé**, est donné par la relation de récurrence

$$q_n(x_1, \dots, x_n) = q_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n - q_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}),$$

avec  $q_{-1} = 0, q_0 = 1$  et où  $n$  est le nombre de variables.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
 q_{-1} &= 0 \\
 q_0 &= 1 \\
 q_1 &= x_1 \\
 q_2 &= x_1x_2 - 1 \\
 q_3 &= (x_1x_2 - 1)x_3 - x_1 = x_1x_2x_3 - x_3 - x_1 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Le prochain lemme permet d'exprimer le  $n^e$  polynôme continuant signé sous forme de déterminant.

**Lemme 6.2.**

$$q_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_1 \end{vmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Cette preuve se fait par récurrence sur le nombre de variables  $n$ . Pour  $n = 1$ , on a que  $q_1 = x_1$ . Supposons que la propriété est vraie jusqu'à  $n - 1$  inclusivement et montrons-la pour  $n$ .

$$\begin{aligned}
 q_n(x_1, \dots, x_n) &= q_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n - q_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) \\
 &= x_n \begin{vmatrix} x_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_2 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & x_1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x_n & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

□

**Remarque.** En développant le déterminant à partir de la dernière colonne, on obtient une relation de récurrence équivalente à la définition des polynômes continnants signés, c'est-à-dire

$$q_n(x_1, \dots, x_n) = q_{n-1}(x_2, \dots, x_n)x_1 - q_{n-2}(x_3, \dots, x_n).$$

Il est notamment possible d'effectuer un lien entre les polynômes continnants signés et les fonctions de frise dans le cas d'un carquois dont le graphe sous-jacent est de type  $\mathbb{A}_n$ , comme le montre le prochain théorème.

**Théorème 6.3.** ([FL10], Cor. 3.14) Soit  $Q = \vec{\mathbb{A}}_n$  et  $f : (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow K$  une fonction de frise. Alors,  $f(0, i) = q_i(f(0, 1), f(-1, 1), \dots, f(-i + 1, 1))$ .  $\square$

Ces résultats ont été appliqués dans les travaux de Dupont en lien avec les tubes stables de rang  $p$  et la fonction de Caldero-Chapoton [Dup09].

## Références

- [ARS10] Assem, I., Reutenauer, C. et Smith D. *Friezes*, Advances in Mathematics 225 (2010) 3134-3165.
- [Bou11] Boulet-St-Jacques, D. *Les algèbres amassées : Définitions de base et résultats*, (2011) soumis pour publication.
- [BCD11] Boulet-St-Jacques, D., Chabot, M. et Douville G. *Groupes de frises des répétitions des carquois de type Dynkin*, (2011) soumis pour publication.
- [CC73] Conway, J.H. et Coxeter, H.S.M. *Triangulated polygons and frieze patterns*, The Mathematical Gazette 57, no. 400, (1973) 87-94.
- [Dup09] Dupont, G. *Cluster Multiplication in Regular Components via Generalized Chebyshev Polynomials*, arXiv :0801.3964v2 [math.RT] (2009) 1-20.
- [FL10] Fraser Martineau, J.-S. et Lavertu, D. *Frises et triangulations de polygones*, Revue CaMUS 1, Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, (2010) 39-59.
- [FZ02] Fomin, S. et Zelevinsky, A. *Cluster algebras I : Foundations.*, Journal of the American Mathematical Society, Volume 15, Numéro 2, (2002) 497-529.
- [FZ03] Fomin, S. et Zelevinsky, A. *Cluster algebras II : Finite type classification*, Invent. Math. 154 (2003), no. 1, 63-121.
- [KS10] Keller, B. et Scherotzke, S. *Linear recurrence relations for cluster variables of affine quivers*, arXiv :1004.0613v2 [math.RT], (2010) 1-20.
- [MSW09] Musiker, G., Schiffler, R. et Williams, L. *Positivity For Cluster Algebras From Surfaces*, arXiv :0906.0748v1 [math.CO], (2009) 1-67.
- [Ngu06] Nguefack, B. *Introduction aux Algèbres amassées : Définitions et exemples*, [http://www.usherbrooke.ca/mathematiques/fileadmin/sites/mathematiques/documents/Recherche/Publications/Rapports\\_de\\_recherche/rr41.pdf](http://www.usherbrooke.ca/mathematiques/fileadmin/sites/mathematiques/documents/Recherche/Publications/Rapports_de_recherche/rr41.pdf), (2006) 1-33.
- [RS08] Rousseau, C. et Saint-Aubin, Y. *Mathématiques et technologies*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology (2008) chapitre 2, 45-84.

MYRIAM CHABOT, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
 Courriel: Myriam.Chabot@usherbrooke.ca