

TRIANGULATIONS, CARQUOIS ET THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

GUILLAUME DOUVILLE

1. Introduction

Les algèbres amassées sont des \mathbb{Z} -algèbres commutatives, ou anneaux commutatifs, de polynômes à coefficients entiers, qui sont munies d'une structure combinatoire. Cette classe d'algèbres a été définie par Sergey Fomin et Andreï Zelevinsky en 2002, voir [FZ02]. L'objectif était d'étudier le caractère combinatoire de la positivité totale et des bases canoniques duales dans les groupes de Lie. Les algèbres amassées sont engendrées par les variables amassées, obtenues par des mutations de carquois (on réfère le lecteur à [Bou11] pour les définitions de base sur les algèbres amassées). Les algèbres amassées ont par la suite trouvé des applications et interprétations dans plusieurs domaines mathématiques et physiques, par exemple les systèmes intégrables, la géométrie de Poisson et la thermodynamique.

L'objectif de cet article est de fournir une méthode de calcul des variables amassées. En effet, nous verrons qu'il est possible d'associer à une triangulation d'une surface marquée un carquois. Pour ce faire, il faudra commencer par quelques définitions et résultats de topologie des surfaces. Par la suite, en définissant une mutation de triangulations analogue à la mutation de carquois, on obtient le calcul des variables amassées.

Ensuite, nous verrons les pavages. Plusieurs résultats importants ont été obtenus en passant par le concept de frises (voir [Cha11] pour une introduction aux frises). Pourtant, les frises, pour les carquois les plus simples, ceux de type \mathbb{A}_n , ne sont que des pavages, qui ont été étudiés pour la première fois par John H. Conway et Harold S. Coxeter en 1973, voir [CC73]. Nous verrons dans cet article qu'il existe une bijection entre les triangulations de polygones et les pavages.

Mes remerciements à David Boulet-St-Jacques et à Myriam Chabot pour l'aide apportée lors de la rédaction de cet article. Mes remerciements aussi à tous ceux qui ont donné un séminaire d'algèbres amassées cet été, l'article n'aurait pu voir le jour sans vous. Un remerciement particulier à Ibrahim Assem et à Thomas Brüstle pour m'avoir offert ce stage, ainsi que pour la supervision et les conseils. Finalement, un remerciement à Thomas Brüstle et au CRSNG pour le financement de ce stage.

Finalement, l'article terminera avec une preuve du théorème de Ptolémée, un théorème datant de la Grèce Antique qui s'est trouvé être lié avec la méthode de calcul des variables amassées par les mutations de triangulations. La preuve présentée requiert des notions de géométrie projective et la définition des transformations de Möbius, qui ont la propriété de conserver le cercle. Nous terminerons par quelques propriétés de ces transformations en géométrie hyperbolique.

2. Surfaces, triangulations et carquois associés

2.1. Surfaces

Les triangulations de surfaces orientées sans ponction permettent la construction d'algèbres amassées. En effet, nous verrons plus loin dans cet article qu'à toute triangulation est associée un unique carquois.

Tout d'abord, voyons quelques définitions préliminaires qui mèneront aux surfaces : les espaces topologiques et les homéomorphismes.

Définition 2.1.

Un **espace topologique** est un couple (E, M) , où E est un ensemble et M un sous-ensemble de l'ensemble des parties de E , appelé ensemble des **ouverts** de E . L'ensemble des ouverts M vérifie les propriétés suivantes :

- (1) E et l'ensemble vide sont inclus dans M ;
- (2) Toute réunion d'ouverts de M est un ouvert de M ;
- (3) Toute intersection finie d'ouverts de M est un ouvert de M .

Tout ensemble qui est le complément d'un ensemble ouvert est dit **fermé**.

De plus, un espace topologique est un **espace métrique** s'il est muni d'une distance. Par exemple, \mathbb{R}^n est un espace métrique muni de la distance euclidienne usuelle, que nous rappelons ici.

Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))$ la distance entre ces deux points, donnée par

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Rappelons la définition d'une fonction continue sur un espace topologique.

Définition 2.2.

Soit X, Y des espaces topologiques. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite **continue** si et seulement si pour tout ouvert O de Y , la préimage

$$f^{-1}(O) = \{x \in X \mid f(x) \in O\}$$

est un ouvert de X .

Nous passons maintenant à la définition d'homéomorphisme.

Définition 2.3.

Deux espaces topologiques E et E' sont **homéomorphes** s'il existe une bijection continue $f : E \rightarrow E'$ telle que f^{-1} soit aussi continue.

L'application f est alors appelée un **homéomorphisme**.

Définition 2.4.

Une **surface** est un espace topologique où le voisinage de tout point est homéomorphe au plan.

Dans cet article, nous nous intéresserons plus particulièrement aux surfaces compactes, connexes et orientables de genre nul. Nous verrons donc les définitions de ces concepts. De plus, nous présentons la définition d'une courbe, celle-ci étant nécessaire à la définition du genre d'une surface.

Définition 2.5.

Soit \mathcal{S} une surface. Une **courbe** est l'image d'une fonction continue :

$$f : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ t & \longmapsto & f(t). \end{array}$$

Définition 2.6.

On dit qu'une surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^n est **compacte** si elle est à la fois bornée, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ et un $r > 0$ tels que pour tout $s \in \mathcal{S}$, on ait $d(x, s) < r$, et fermée.

Définition 2.7.

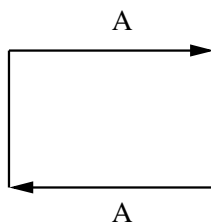
On dit qu'une surface \mathcal{S} est **connexe** si les seuls sous-ensembles à la fois ouverts et fermés de \mathcal{S} sont l'ensemble vide et \mathcal{S} elle-même.

Pour définir le concept de surface orientable, il est utile de rappeler ce qu'est un ruban de Möbius.

Définition 2.8.

Un **ruban de Möbius** est un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ ayant deux côtés opposés identifiés par la relation $(x, c) \sim (b - x, d)$ pour tout x tel que $a \leq x \leq b$.

On peut représenter le ruban de Möbius comme suit :

**Définition 2.9.**

On dit qu'une surface \mathcal{S} est **orientable** si aucun sous-ensemble de \mathcal{S} n'est homéomorphe au ruban de Möbius.

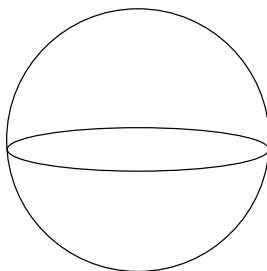
Définition 2.10.

Le **genre** d'une surface orientable est le nombre maximal de courbes fermées que l'on peut tracer sur la surface sans couper cette dernière en plusieurs parties connexes.

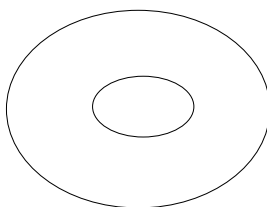
Exemple.

Voici quelques surfaces compactes, orientables et connexes :

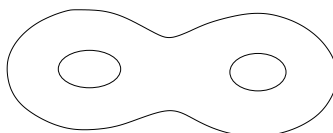
- (1) La sphère $\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$ est une surface de genre 0.



(2) Le tore est une surface de genre 1.



(3) L'union de deux tores est une surface de genre 2.



(4) De même, l'union de n tores est une surface de genre n .

Nous en arrivons à un théorème qui permet de simplifier l'étude des surfaces d'intérêt pour les algèbres amassées, c'est-à-dire les surfaces compactes, orientables et connexes.

Théorème 2.11 ([Mas89]).

Toute surface compacte, orientable et connexe dans \mathbb{R}^3 est homéomorphe soit à \mathbb{S}^2 , soit à la somme de n tores. \square

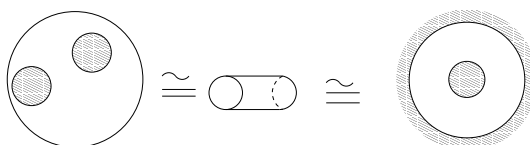
Dans le cas le plus simple, on souhaite considérer la triangulation de polygones représentés sur un disque. Il est donc nécessaire de considérer l'ajout de frontières à nos surfaces, de façon à obtenir par homéomorphisme des figures sur le plan \mathbb{R}^2 .

Définition 2.12.

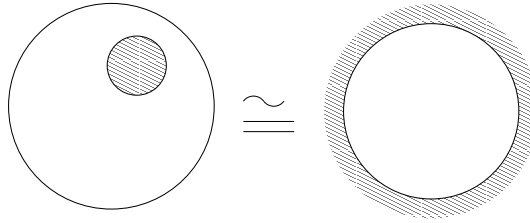
Soit S une surface et D_1, D_2, \dots, D_b , des disques disjoints de frontières circulaires C_1, C_2, \dots, C_b dans S . On dit que, à homéomorphisme près, $R = S \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_b)$ est une **surface avec frontière** $\partial R = C_1 \cup \dots \cup C_b$.

Exemples.

(1) La surface $\mathbb{S}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ est homéomorphe à un cylindre.



(2) La surface $\mathbb{S}^2 \setminus D_1$ est homéomorphe à un disque.



Nous commençons l'étude des triangulations des surfaces marquées sans ponction.

Définition 2.13.

Soit S une surface et $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini de points tels que $x_i \in S$ ou $x_i \in \delta S$. La **surface marquée** R est la paire $R = (S, M)$. On dit de plus que la surface est **sans ponction** si $M \subseteq \delta S$.

Définition 2.14.

Soit $R = (S, M)$ une surface marquée. Soient γ, δ deux fonctions

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow S \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta : [0, 1] &\rightarrow S \\ t &\mapsto \delta(t). \end{aligned}$$

On pose $\gamma(0) = \delta(0)$ et $\gamma(1) = \delta(1)$. Une **homotopie** est une fonction continue

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

telle que $h(0, t) = \gamma(t)$ et $h(1, t) = \delta(t)$, pour tout t .

Les courbes γ et δ sont alors dites **homotopes**.

Il est facile de prouver que l'homotopie entre des courbes est une relation d'équivalence. On appelle **classes d'homotopie** les différentes classes d'équivalences formées par cette relation.

Définition 2.15.

Soit (R, M) une surface marquée. Un **arc** dans (R, M) est une classe d'homotopie de courbes $\alpha_i \in R$ qui ne s'auto-intersectent pas et telles que $\alpha_i(0) \in M$ et $\alpha_i(1) \in M$, c'est-à-dire que ces courbes commencent et se terminent en des points appartenant à M .

La triangulation est l'opération qui permet, à l'aide d'arcs, de transformer une surface marquée en une union finie de surfaces triangulaires. Les triangulations usuelles de polygones sont en fait la triangulation d'une surface sphérique à une frontière, homéomorphe à un disque dans le plan \mathbb{R}^2 . Ainsi, trianguler un rectangle revient à en tracer une diagonale.

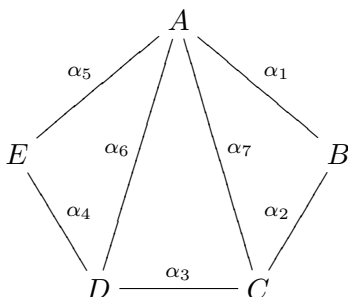
Définition 2.16.

Soient R une surface avec frontières et M un ensemble fini de points marqués appartenant à $R \cup \partial R$. Une **triangulation** T est un ensemble maximal d'arcs qui ne s'intersectent qu'en M .

Exemples.

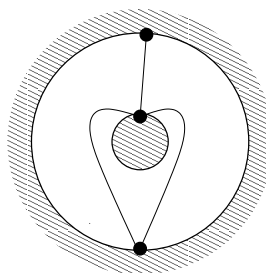
- (1) Soit
- $R = S^2 \setminus D_1$
- un disque et
- M
- un ensemble de 5 points sur
- ∂R
- .

Alors (R, M) est homéomorphe à un pentagone. Une triangulation possible est $T = \{\alpha_i, 1 \leq i \leq 7\}$, telle qu'indiquée sur la figure suivante.

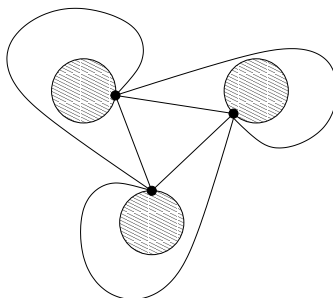


On appellera les arcs α_6 et α_7 arcs internes tandis que $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ seront les arcs de frontières.

- (2) Soit
- $R = S^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$
- , et
- M
- un ensemble de 3 points sur
- ∂R
- . Une triangulation possible est :



- (3) Soient
- $R = S^2 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$
- , et
- M
- un ensemble de 3 points sur
- ∂R
- . Une triangulation possible est alors :



Dans ce qui suit, on note $|E|$ la cardinalité d'un ensemble E .

Théorème 2.17 ([FST08]).

Soient (R, M) une surface marquée sans ponction, g son genre et b le nombre de disques retirés. Alors le nombre n d'arcs internes d'une triangulation T de (R, M) est

$$n = 6g + 3b + |M| - 6.$$

□

Corollaire 2.18.

Soient T et T' deux triangulations de (R, M) . Alors $|T| = |T'|$, c'est-à-dire que le nombre d'arcs internes de T et de T' sont égaux.

Démonstration. Cela suit directement du théorème précédent. □

Nous verrons maintenant le lien entre triangulations de surfaces marquées et algèbres amassées. Comme il a été dit précédemment, à toute triangulation est associé un unique carquois.

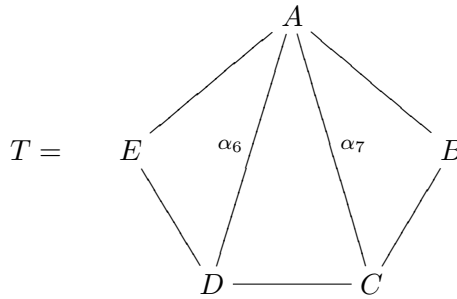
Définition 2.19.

Soit T une triangulation d'une surface marquée sans ponction. Le carquois associé à la triangulation, noté Q_T , est ainsi défini :

- L'ensemble Q_0 de ses points est l'ensemble des arcs internes α_i de T ;
- L'ensemble Q_1 de ses flèches est l'ensemble des flèches $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ telles que $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_0$ et α_1 est un prédécesseur de α_2 , selon l'orientation horaire.

Exemple.

Considérons le cas du pentagone. On a alors que



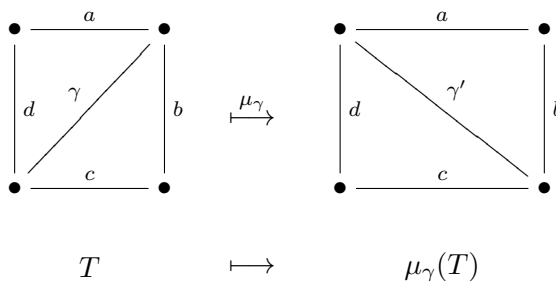
Le carquois associé à une telle triangulation est

$$Q_T = \alpha_7 \rightarrow \alpha_6 .$$

Comme tout carquois peut être muté en un nouveau carquois, et que chacun de ces carquois est associé à une triangulation, il serait intéressant de connaître une façon de muter les triangulations directement.

Définition 2.20.

Soient T une triangulation d'une surface marquée et γ un arc interne de T . Considérons le quadrilatère $abcd$ dont γ est une diagonale. On définit le **flip** $\mu(\gamma)$ de γ par $\mu(\gamma) = \gamma'$ où γ' est la seconde diagonale de $abcd$.



Théorème 2.21 ([Hat91]).

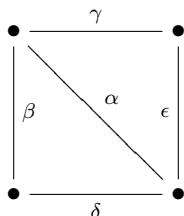
Soient T et T' deux triangulations de (R, M) . Alors il existe une suite de flips permettant de transformer T en T' . \square

Lemme 2.22.

Le carquois associé au flip en α d'une triangulation T est le même que le carquois obtenu par la mutation en α du carquois associé à la triangulation T . En particulier, le diagramme suivant est commutatif :

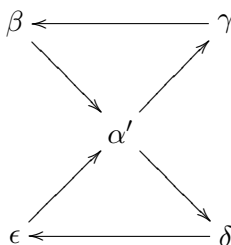
$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mu_\alpha(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_T & \longrightarrow & \mu_\alpha(Q_T) = Q_{\mu_\alpha(T)} \end{array}$$

Démonstration. Soit T une triangulation d'une surface marquée sans ponction. Soit α un arc interne. On peut former un quadrilatère dont α est la diagonale et les cotés des arcs de T .



Soit Q_T le carquois associé à la triangulation T . On peut considérer, sans perte de généralité, Q_T comme étant le sous-carquois associé aux arcs internes ci-dessus, car la mutation est un processus local.

On voit que $Q_{\mu_\alpha(T)}$ et $\mu_\alpha(Q_T)$ sont tous deux égaux au carquois suivant :



\square

Soit T une triangulation de la surface marquée sans ponction (R, M) . Nous savons que si T a n arcs internes, alors il lui est associé un carquois Q_T ayant n points. Soit $X_T = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n indéterminées associées aux points de Q_T . Alors la triangulation T induit une algèbre amassée $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_T, Q_T)$, comme vu dans [Bou11]. Il suit du théorème 2.21 et du lemme 2.22 que cette algèbre amassée ne dépend pas de la triangulation T , mais uniquement de la surface marquée (R, M) .

Définition 2.23.

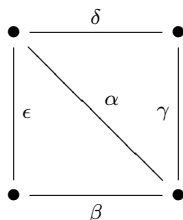
Soit (R, M) une surface marquée sans ponction et T une triangulation de (R, M) . Alors, l'algèbre amassée $\mathcal{A}(R, M)$ associée à (R, M) est l'algèbre $\mathcal{A}(X_T, Q_T)$.

Nous savons que les points de Q_T correspondent aux arcs internes de T . Soit ainsi $x_\alpha \in X_T$ la variable amassée correspondant à l'arc α de T . Alors, la formule

d'échange de Fomin et Zelevinsky (voir [Bou11]) s'écrit

$$x_\alpha x_{\alpha'} = x_\delta x_\beta + x_\epsilon x_\gamma$$

pour le quadrilatère



où α' note le flip de α .

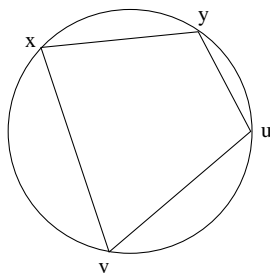
Il s'agit de l'équivalent de la relation de Ptolémée. Cette relation sera approfondie dans la section 3.4. Néanmoins, en voici l'énoncé :

Théorème de Ptolémée.

Soient $x, y, u, v \in \mathbb{R}^2$ distincts et concentriques. Alors, le produit des diagonales d'un quadrilatère inscritible est égal à la somme des produits des paires de côtés opposés :

$$d(u, x)d(y, v) = d(x, y)d(u, v) + d(x, v)d(u, y)$$

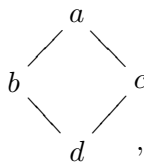
□



2.2. Pavage et triangulation

Définition 2.24.

Un **pavage** d'ordre n consiste en $n - 1$ lignes, la première et la dernière étant constituées de 1, telles que pour toute maille



on ait la relation $bc - ad = 1$

Exemple.

Voici un pavage d'ordre 7.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
		1	3	2	2	1	4	2	1	3	
...	1	2	5	3	1	3	7	1	2	5	...
		1	3	7	1	2	5	3	1	3	
	2	1	4	2	1	3	2	2	1	4	
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Théorème 2.25 ([CC73]).

Tout pavage d'ordre n est périodique de période n . □

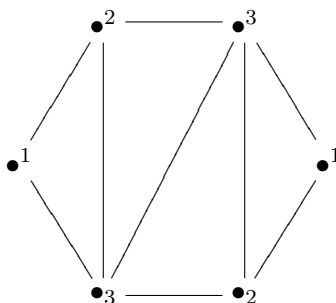
Nous verrons maintenant qu'il y a un lien entre triangulations d'un polygone et pavages. En effet, pour tout pavage, la deuxième ligne de celui-ci correspondra au nombre de triangles adjacents à chaque sommet.

Notation 2.26.

Soit T une triangulation d'un polygone à n côtés, on note P_T le pavage (au sens de [CC73]) dont la deuxième ligne est donnée par le nombre de triangles adjacents à chaque sommet de ce polygone.

Exemple.

Considérons la triangulation suivante de l'hexagone. Les nombres associés aux sommets représentent le nombre de triangles adjacents à ce sommet.



Le pavage associé à cette triangulation de l'hexagone est alors :

	1	1	1	1	1	1	1	1	
		2	3	1	2	3	1	2	3
...	1	5	2	1	5	2	1	5	...
		2	3	1	2	3	1	2	3
	1	1	1	1	1	1	1	1	

Théorème 2.27 ([CC73]).

Soient T_n l'ensemble des triangulations du polygone à n côtés, où $n \geq 4$, et P_n

l'ensemble des pavages d'ordre $n \geq 4$, où $n \in \mathbb{Z}$. Il existe une bijection

$$\begin{aligned} \phi : T_n &\longrightarrow P_n \\ T &\longmapsto P_T. \end{aligned}$$

□

3. Autour du théorème de Ptolémée

3.1. Géométrie projective

Le but principal de cette section est d'arriver à une preuve du théorème de Ptolémée en utilisant des outils de géométrie projective. Nous profiterons aussi de cet article pour présenter quelques résultats intéressants liés à cette géométrie.

En premier lieu, on souhaite définir l'espace complexe projectif $\mathbb{C}P^1$.

Définition 3.1.

L'espace complexe projectif $\mathbb{C}P^1$ est l'ensemble des droites complexes contenant l'origine, c'est-à-dire que $\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{\vec{0}\}) / \sim$, où $\vec{x} \sim \vec{y}$ si et seulement s'il existe un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\vec{y} = \lambda \vec{x}$.

Nous notons $(x : y)$ la droite passant par le point $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et l'origine.

Nous présentons une bijection entre l'espace complexe projectif et un espace plus intuitif. Pour y arriver, nous devons accepter d'inclure un point infini au plan complexe.

Définition 3.2.

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Considérons l'ajout d'un point appelé infini, noté ∞ , au plan complexe \mathbb{C} , défini de façon à respecter les énoncés suivants :

$$a\infty + b = \infty$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

$$\frac{a}{0} = \infty$$

$$\frac{a\infty}{b\infty} = \frac{a}{b}$$

Voici la fonction bijective entre les droites de \mathbb{C}^2 et le plan complexe muni du point infini $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, un plan dont les extrémités infinies seraient identifiées en un point.

Théorème 3.3 ([And07], [Tot02]).

Il existe une bijection entre $\mathbb{C}P^1$ et $\hat{\mathbb{C}}$, définie ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^1 &\longleftrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ (x : y) &\longmapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ \infty & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Maintenant que nous avons défini $\hat{\mathbb{C}}$, il est possible de définir des fonctions intéressantes sur cet ensemble appelées les transformations de Möbius. En effet, ces transformations auront plusieurs propriétés utiles, entre autres, à la preuve que l'on souhaite présenter du théorème de Ptolémée. De plus, nous verrons en ouverture des propriétés des transformations de Möbius utiles en géométrie hyperbolique

3.2. Transformation de Möbius

Définition 3.4.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Une **transformation de Möbius** est une fonction f telle que :

$$f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $ad - bc \neq 0$.

Pour les preuves subséquentes, il sera souvent plus aisé de travailler avec des fonctions plus simples que les transformations de Möbius. C'est pour cette raison que nous présentons une composition de fonctions égale aux transformations de Möbius.

Proposition 3.5.

Soit a un complexe différent de 0. Toute transformation de Möbius est une composition des fonctions complexes suivantes :

$$I_b : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : z \mapsto z + b \quad (\text{translation})$$

$$II_a : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : z \mapsto az \quad (\text{homothétie})$$

$$III : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : z \mapsto \frac{1}{z} \quad (\text{inversion})$$

Démonstration. Soit f une transformation de Möbius. (On a que $bc - ad \neq 0$).

Si $c = 0$, alors $f = II_{\frac{a}{d}} \circ I_{\frac{b}{d}}$. Supposons donc que $c \neq 0$.

On obtient par division que

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{cb - ad}{c^2z + cd}.$$

Il est alors facile de vérifier que

$$f = I_{\frac{a}{c}} \circ II_{bc-ad} \circ III \circ I_{cd} \circ II_{c^2}.$$

□

Voyons maintenant les propriétés de ces transformations. Premièrement, celles-ci sont non seulement inversibles, mais leurs inverses sont aussi des transformations de Möbius. De plus, les transformations de Möbius sont stables pour l'opération de composition. Comme nous le verrons, ces deux propriétés sont centrales à la preuve du théorème de Ptolémée.

Proposition 3.6.

L'ensemble des transformation de Möbius est un groupe pour la composition.

Démonstration. Soient f et g des transformations de Möbius définies par :

$$\begin{aligned} f &: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \\ g &: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \end{aligned}$$

avec $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ et $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$.

Premièrement, la fonction identité $\mathbb{I} : z \mapsto z$ est une transformation de Möbius. De plus, on obtient aisément que :

$$(f \circ g^{-1})(z) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(a_2 c_1 + c_2 d_1)z + (b_2 c_1 + d_1 d_2)}$$

Finalement, on a que :

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

ce qui est une transformation de Möbius. □

Il importe maintenant de généraliser la notion de cercle dans $\hat{\mathbb{C}}$, afin de présenter une propriété de conservation des cercles par les transformations de Möbius.

Définition 3.7.

Si \mathcal{C} est une droite passant par l'infini dans $\hat{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire l'union d'une droite dans \mathbb{C} et du point ∞ , ou un cercle dans $\hat{\mathbb{C}}$, alors \mathcal{C} est un **cercle généralisé**.

Théorème 3.8 ([Sch79]).

Si f est une transformation de Möbius et \mathcal{C} un cercle généralisé, alors $f(\mathcal{C})$ est un cercle généralisé. □

Cette propriété nous rapproche du but, car, on le rappelle, la relation de Ptolémée n'est vraie que pour un quadrilatère inscriptible dans un cercle. Il est donc essentiel que les transformations de Möbius conservent le cercle généralisé.

Il reste cependant un dernier obstacle avant de présenter la preuve du Théorème de Ptolémée. Il est nécessaire de définir un rapport entre les côtés d'un quadrilatère. Rapport qui serait, idéalement, en lien avec les transformations de Möbius. À cette fin, nous présentons la définition du birapport.

3.3. Birapport

Définition 3.9.

Soient $x, y, u, v \in \hat{\mathbb{C}}$, tous distincts. Le **birapport** de x, y, u, v , noté $b(x, y, u, v)$, ou parfois $(x; y; u; v)$, est donné par :

$$b(x, y, u, v) = \frac{(x - u)(y - v)}{(x - v)(y - u)}$$

Voyons maintenant un premier lien entre les transformations de Möbius et le birapport.

Théorème 3.10.

Soient $x, y, u, v \in \hat{\mathbb{C}}$, tous distincts. Si f est une transformation de Möbius, alors on a que :

$$b(f(x), f(y), f(u), f(v)) = b(x, y, u, v)$$

Démonstration. Soit f une transformation de Möbius. Soient x, y, u, v distincts dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Comme f est une composition de I_b, II_a et III , il suffit de prouver que chacune de ces fonctions conserve le birapport.

$$\begin{aligned}
b(I_b(x), I_b(y), I_b(u), I_b(v)) &= b(x+b, y+b, u+b, v+b) \\
&= \frac{(x+b-u-b)(y+b-v-b)}{(x+b-v-b)(y+b-u-b)} \\
&= \frac{(x-u)(y-v)}{(x-v)(y-u)} \\
&= b(x, y, u, v) \\
b(II_a(x), II_a(y), II_a(u), II_a(v)) &= b(ax, ay, au, av) \\
&= \frac{(ax-au)(ay-av)}{(ax-av)(ay-au)} \\
&= \frac{a(x-u)a(y-v)}{a(x-v)a(y-u)} \\
&= \frac{(x-u)(y-v)}{(x-v)(y-u)} \\
&= b(x, y, u, v) \\
b(III(x), III(y), III(u), III(v)) &= b\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{u}\right) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{v}\right)}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{v}\right) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{u}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{xu}(u-x) \frac{1}{vy}(v-y)}{\frac{1}{xv}(v-x) \frac{1}{uy}(u-y)} \\
&= \frac{(u-x)(v-y)}{(v-x)(u-y)} \\
&= b(x, y, u, v)
\end{aligned}$$

□

Voici la propriété centrale qui montre l'intérêt des transformations de Möbius et du birapport. Une fonction qui envoie tout point vers son birapport avec trois points arbitraires, mais distincts, a la propriété d'être un birapport.

Proposition 3.11.

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, tous distincts. Considérons la fonction complexe $\beta_{a,b,c}$ suivante :

$$\beta_{a,b,c} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \mapsto b(z, a, b, c)$$

Alors, $\beta_{a,b,c}$ est une transformation de Möbius.

Démonstration. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tous distincts.

Il suffit de montrer que $b(z, a, b, c)$ s'écrit sous la forme $\frac{Az + B}{Cz + D}$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ et $AD - BC \neq 0$.

Or,

$$\begin{aligned} b(z, a, b, c) &= \frac{(z - b)(a - c)}{(z - c)(a - b)} \\ &= \frac{(a - c)z + (bc - ab)}{(a - b)z + (bc - ac)} \\ &= \frac{(Az + B)}{(Cz + D)} \end{aligned}$$

où $A = a - c, B = bc - ab, C = a - b$ et $D = bc - ac$.

De plus, $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ et

$$\begin{aligned} AD - BC &= (a - c)(bc - ac) - (bc - ab)(a - b) \\ &= (b - c)(a - c)(a - b) \\ &\neq 0, \text{ car } a, b, c \text{ sont distincts en vertu de l'hypothèse.} \end{aligned}$$

□

Remarquons que la transformation de Möbius $\beta_{a,b,c}$ est munie de la propriété essentielle de fixer l'image de a, b, c . En effet, on a

$$\beta_{a,b,c}(a) = 1, \quad \beta_{a,b,c}(b) = 0, \quad \beta_{a,b,c}(c) = \infty.$$

pour tous a, b, c .

Grâce à la proposition et à la remarque précédentes, il est possible d'établir le corollaire suivant.

Corollaire 3.12.

Pour tous $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts et pour tous $a', b', c' \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts, il existe une transformation de Möbius f telle que

$$f(a) = a', \quad f(b) = b', \quad f(c) = c'.$$

Démonstration. Cela suit directement de la proposition 3.11. En effet, il suffit de considérer les fonctions $\beta_{a,b,c}$ et $\beta_{a',b',c'}$. Il s'ensuit que $f = \beta_{a',b',c'}^{-1} \circ \beta_{a,b,c}$ est telle que :

$$f(a) = a', \quad f(b) = b', \quad f(c) = c'.$$

□

Ce corollaire simplifiera grandement les preuves subséquentes, puisqu'il sera possible de considérer seulement un triplet choisi de points (à savoir $0, 1$ et ∞) sans perte de généralité.

Pour l'instant, nous avons considéré le choix de points arbitraires distincts. Nous prouvons maintenant que le choix de points appartenant à un même cercle (généralisé) mènera à l'obtention d'un birapport réel malgré le fait qu'a priori, le birapport soit un nombre appartenant à $\hat{\mathbb{C}}$.

Théorème 3.13.

Soient $x, y, u, v \in \hat{\mathbb{C}}$ tous distincts. Alors le birapport $b(x, y, u, v)$ appartient à \mathbb{R} si et seulement si x, y, u, v appartiennent à un même cercle généralisé.

Démonstration. Soit $v \in \hat{\mathbb{C}}$. En vertu du corollaire précédent, on peut considérer sans perte de généralité que $x = 0, y = 1, u = \infty$.

$$\begin{aligned} b(0, 1, \infty, v) &= \frac{(0 - \infty)(1 - v)}{(0 - v)(1 - \infty)} \\ &= 1 - \frac{1}{v} \end{aligned}$$

et cette dernière expression est réelle si et seulement si v appartient aux réels si et seulement si $0, 1, \infty$ et v se retrouvent sur l'axe réel dans \mathbb{C} , donc sur le même cercle généralisé dans $\hat{\mathbb{C}}$. \square

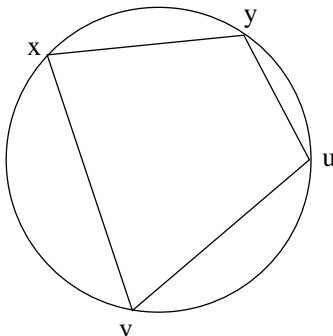
3.4. Théorème de Ptolémée

Comme nous l'avons vu précédemment, la nouvelle variable obtenue d'un flip est déterminée par une formule rappelant le théorème de Ptolémée. Voici maintenant la preuve de ce théorème :

Théorème de Ptolémée.

Soient $x, y, u, v \in \mathbb{R}^2$ distincts et sur un même cercle. Alors,

$$d(u, x)d(y, v) = d(x, y)d(u, v) + d(x, v)d(u, y).$$



Démonstration. Considérons une transformation de Möbius telle que

$$x' = f(x), y' = f(y), u' = f(u), v' = f(v) = \infty.$$

On a alors que :

$$\begin{aligned}
b(x, y, u, v) &= \frac{(x-u)(y-v)}{(x-v)(y-u)} \\
&= \frac{(x'-u')}{(y'-u')} \\
&= \frac{x'-y'+y'-u'}{y'-u'} \\
&= \frac{(x'-y')(u'-v')}{(y'-u')(x'-v')} + 1 \\
&= \frac{(x-y)(u-v)}{(y-u)(x-v)} + 1
\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité suivant du fait que $v' = \infty$ et la dernière venant par application de f^{-1} .

Ainsi, on a que $(x-u)(y-v) = (x-y)(u-v) + (y-u)(x-v)$, d'où on peut conclure à l'égalité des distances :

$$\begin{aligned}
d(x, u)d(y, v) &= |x-u||y-v| \\
&= |x-y||u-v| + |y-u||x-v| \\
&= d(x, y)d(u, v) + d(u, y)d(x, v)
\end{aligned}$$

□

3.5. Quelques propriétés des transformations de Möbius en géométrie hyperbolique

Cette section s'éloigne quelque peu de l'étude des algèbres amassées, néanmoins elle est en lien direct avec les outils développés dans cet article en vue d'obtenir une preuve du théorème de Ptolémée. Nous présentons des liens entre transformations de Möbius et géométrie hyperbolique.

Notation 3.14.

On note \mathcal{H} le demi-plan complexe supérieur muni du point à l'infini, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Im}(x) \geq 0\}$.

Commençons par définir la distance la plus courte entre deux points, en quelque sorte le segment de droite de la géométrie hyperbolique, puis l'angle entre deux courbes.

Définition 3.15.

Soient $a, b \in \mathcal{H}$, soit Γ l'ensemble des courbes $\gamma(t)$ entre a et b , $a \leq t \leq b$. Alors, la **distance hyperbolique** $d_H(a, b)$ entre a et b est donnée par

$$d_H(a, b) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt.$$

Remarque. $\|\cdot\|$ note la norme euclidienne usuelle d'une courbe paramétrisée dans \mathbb{C} .

Nous verrons plus loin une façon concrète de calculer cette distance, car l'ensemble des longueurs des courbes entre a et b est de cardinalité infinie. La preuve de cette méthode peut être obtenue au moyen des transformations de Möbius.

Théorème 3.16.

Soit f une transformation de Möbius telle que :

$$\begin{aligned} f : \hat{\mathbb{C}} &\rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

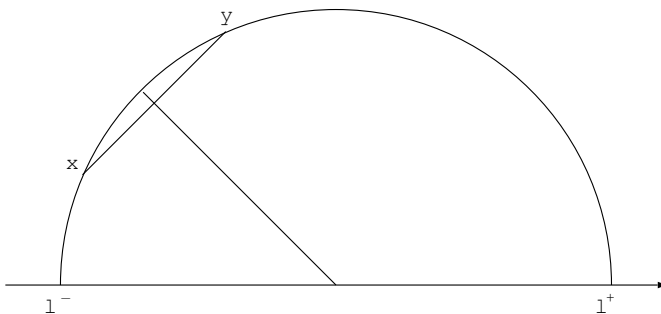
où a, b, c, d sont réels.

Alors, f préserve le demi-plan supérieur \mathcal{H} . □

Notation 3.17.

Soient $x, y \in \mathcal{H}$. On note l^- et l^+ les points d'intersection entre l'axe réel et le demi cercle passant par x et y et centré sur l'axe réel.

On convient de choisir l^- et l^+ de façon à avoir $l^- < l^+$.

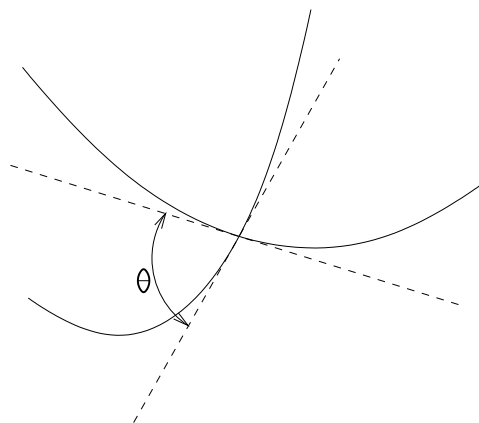


Proposition 3.18 ([And07]).

Soient $x, y \in \mathcal{H}$. Alors, $d_H(x, y)$ est donnée par la longueur de l'arc de cercle entre x et y défini en 3.17. □

Définition 3.19.

L'angle θ entre deux courbes dans \mathcal{H} est défini comme étant l'angle entre ces deux courbes dans \mathbb{C} , c'est-à-dire l'angle entre les droites tangentes au point d'intersection des deux courbes.



Proposition 3.20 ([And07]).

Soient f une transformation de Möbius et γ, δ deux courbes dans \mathcal{H} . Alors, f préserve l'angle entre γ et δ . \square

Références

- [And07] J.W. Anderson. *Hyperbolic Geometry*, 2^e éd., Springer (2007), 276 p.
- [Bou11] D. Boulet-St-Jacques. *Les algèbres amassées : Définitions de base et résultats* (2011), soumis pour publication.
- [Cha11] M. Chabot. *Fonctions de frises et algèbres amassées* (2011), soumis pour publication.
- [CC73] J.H. Conway et H.S.M. Coxeter. *Triangulated Polygons and Frieze Patterns*, The Mathematical Gazette 57, no. 400 (1973) 87-94.
- [FST08] S. Fomin, M. Shapiro et D. Thurston. *Cluster Algebras and Triangulated Surfaces*, Part I : Cluster complexes, Acta Mathematica 201 (2008), 83-146.
- [FZ02] S. Fomin et A. Zelevinsky. *Cluster algebras I : Foundations*, Journal of the American Mathematical Society, Volume 15, Numéro 2 (2002), 497-529.
- [Hat91] A. Hatcher. *On Triangulations of Surfaces*, Topology and its Applications 40 (1991), 189-194.
- [Mas89] W.S. Massey. *Algebraic topology : an introduction*, 8^e éd., Springer (1989), 261 p.
- [Sch79] H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*, Courier Dover Publications (1979), 215 p.
- [Tot02] G. Toth. *Stereographic Projection*, Glimpses of Algebra and Geometry, 2^e éd., Springer (2002).

GUILLAUME DOUVILLE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
 Courriel: Guillaume.Douville@usherbrooke.ca