

HOMOLOGIE D'UNE SURFACE DE RIEMANN ET PROBLÈMES DE RIEMANN-HILBERT

FÉLIX BARIL BOUDREAU

RÉSUMÉ. Dans cet article nous introduisons d'abord quelques notions fondamentales liées aux surfaces de Riemann, à l'homologie et à l'homologie relative d'une surface. Puis, nous faisons un survol du problème de Riemann-Hilbert appliqué aux revêtements ramifiés de la sphère de Riemann avec tous les points de branchement finis comme dans [Shr08]. Enfin, nous analysons le cas où de tels revêtements possèdent des points de branchement à l'infini et de leurs liens avec les revêtements étudiés dans [Shr08].

1. Approche intuitive du revêtement ramifié

1.1. Notion de coupure

Considérons la fonction complexe

$$(1) \quad f(z) = \sqrt{z} \quad \text{avec} \quad z \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Cette fonction possède deux valeurs en chaque point sauf aux points $z = 0$ et $z = \infty$ où la fonction n'admet qu'une unique valeur. Nous pouvons aussi dire que les deux valeurs coïncident en ces points.

Voyons ce qui se passe dans un voisinage du point $z = 0$. Soit

$$(2) \quad z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r > 0$$

où $z = r$ lorsque $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$ (voir la figure 1).

Commençons au point $z = r$ avec la valeur \sqrt{r} de la fonction f et faisons faire un tour complet à z autour de $z = 0$. Nous remarquons qu'en revenant au point $z = r$, la fonction change de signe et passe à $-\sqrt{r}$.

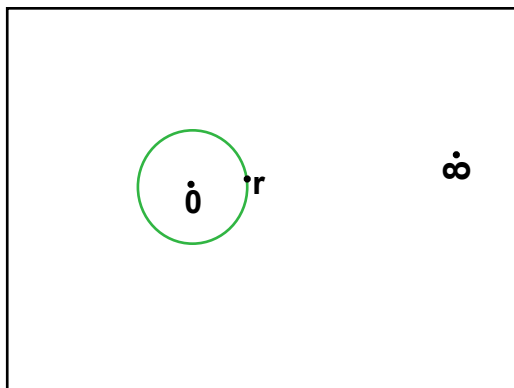
Pour le vérifier, fixons d'abord la valeur de \sqrt{r} . Ceci nous donne l'équation suivante

$$(3) \quad f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}.$$

Lorsque $\theta = 0$, nous obtenons $f(z) = \sqrt{r}e^0 = \sqrt{r}$.

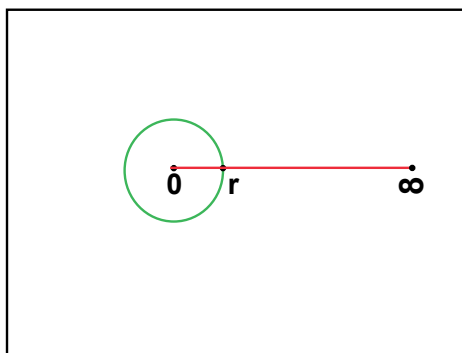
Cependant, si $\theta = 2\pi$, nous obtenons plutôt $f(z) = \sqrt{r}e^{\pi i} = -\sqrt{r}$.

Ainsi, la fonction $f(z) = \sqrt{z}$ n'est pas correctement définie sur $\overline{\mathbb{C}}$. Afin d'obtenir une fonction univoque sur tout le plan, il faut empêcher l'argument z de la fonction de faire un tour complet autour de $z = 0$ ou de $z = \infty$. Pour



$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

FIGURE 1. Le plan complexe compactifié



$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

FIGURE 2. Une coupure entre 0 et ∞ .

ce faire, nous traçons une courbe dans le plan complexe compactifié reliant les points $z = 0$ et $z = \infty$ et nous coupons ce plan le long de cette courbe. Dans cet article, nous choisissons de tracer la courbe le long de l'axe réel positif (voir la figure 2).

Remarquons maintenant qu'en évaluant la fonction précédente en $z = 1$ avec $\theta = 0$ nous obtenons $f(1) = 1$. Après un tour, donc lorsque $\theta = 2\pi$, la valeur de la fonction devient $f(1) = -1$. Définissons deux branches à la fonction f et utilisons le fait que le plan est coupé entre 0 et ∞ . La première branche, $f_1(z) = \sqrt{z}$, prend la valeur 1 en $z = 1$ et la deuxième branche, $f_2(z) = \sqrt{z}$, est définie telle que $f_2(1) = -1$. Prenons maintenant deux copies de $\overline{\mathbb{C}}$ coupées entre 0 et ∞ que nous nommerons \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 (voir la figure 3).

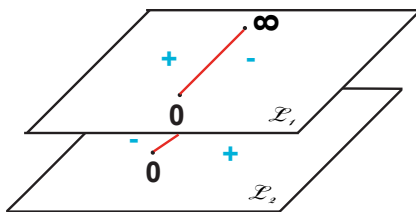


FIGURE 3. Deux copies du plan coupé.

Définissons ensuite la fonction f_1 dans la première des deux copies (\mathcal{L}_1) et f_2 dans l'autre. Nous voulons réussir à coller les deux copies de $\overline{\mathbb{C}}$ ensemble et coller les images des deux branches de la fonction f . L'idée derrière ces manipulations est de construire un domaine sur lequel la fonction \sqrt{z} est univoque.

Tout d'abord, il faut remarquer que chaque copie de $\overline{\mathbb{C}}$ possède deux rives qui sont séparées par une coupure. Chacune de ces rives représente un signe que prend la valeur en 1 de la fonction f sur ce plan. Pour coller les domaines nous procédons ainsi : nous collons la rive de \mathcal{L}_1 où $f_1(1) = 1$ avec la rive de \mathcal{L}_2 où $f_2(1) = 1$. De la même façon, nous collons la rive de \mathcal{L}_1 où $f_1(1) = -1$ avec la rive de \mathcal{L}_2 où $f_2(1) = -1$. Il n'est pas facile de représenter graphiquement un tel collage. Pour mieux apprécier le résultat, il faudrait plonger la surface composée des plans \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 dans un espace de dimension supérieure.

Collons maintenant les images des deux branches de la fonction f ensemble. Pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, nous choisissons l'argument de f_1 tel que $0 \leq \arg(f_1(z)) \leq \pi$. Ainsi, l'image de f_1 correspond au demi-plan avec l'argument de f_1 qui varie entre 0 et π . De même, l'image de la fonction f_2 correspond au demi-plan avec l'argument de f_2 variant entre π et 2π . Nous collons ensuite les images des fonctions le long de l'axe réel. L'image de la fonction f correspond alors au plan complexe compactifié en entier.

Nous dirons qu'une surface composée de deux plans que l'on colle de cette façon s'appelle une surface de Riemann de la fonction $f(z) = \sqrt{z}$. La fonction f est univoque en tout point de cette surface car la coupure oblige la fonction à d'abord passer par les plans \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 avant de retourner à son point de départ. Le plan complexe compactifié $\overline{\mathbb{C}}$ se nomme la sphère de Riemann. Il est homéomorphe à une sphère par projection stéréographique (Voir la figure 4 et [And05]).

Définition 1 (Genre d'une surface). *Étant donné une surface sans bord ni ponction, le genre est donné par le nombre de trous sur cette surface.*

Par exemple, une sphère est de genre zéro, un tore est de genre un et une sphère à deux anses est de genre deux.

Définition 2 (Surface hyperelliptique). *Nous définissons une surface hyperelliptique C comme*

$$(4) \quad C = \{(\mu, \lambda) \mid \mu^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{2g+2}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$$

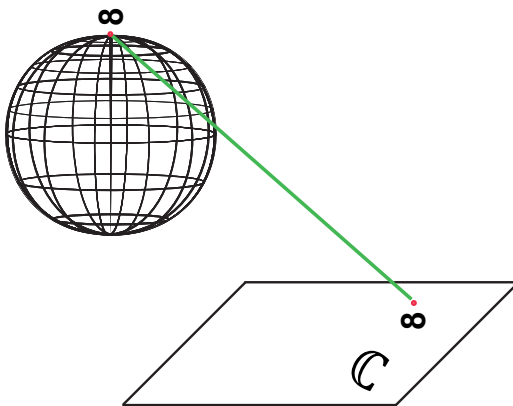
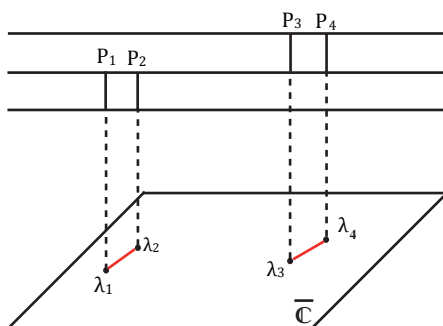


FIGURE 4. Le plan complexe est homéomorphe à la sphère.

FIGURE 5. Le diagramme de Hurwitz $\mathcal{H}_{0;0,0,0}$.

où g représente le genre de la surface. Cependant, le terme *hyperelliptique* s'emploie pour des surfaces avec $g > 1$ tandis qu'une surface avec $g = 1$ sera une *surface elliptique*.

1.2. Le diagramme de Hurwitz et les revêtements ramifiés

Une représentation d'une surface de Riemann est donnée par le diagramme de Hurwitz. Celui-ci est défini comme suit (voir la figure 5). Les lignes horizontales représentent les copies de $\overline{\mathbb{C}}$. Les traits verticaux reliant les deux copies du plan, que nous nommerons maintenant feuillets, représentent les points qui appartiennent à deux feuillets en même temps. Les points sont appelés points de ramification et sont notés P_i avec $i = 1, \dots, n$. Dans le cas de la fonction $f(z) = \sqrt{z}$, les points de ramification sont $z = 0$ et $z = \infty$. Ici, la courbe (4) est l'ensemble des points tels que $(\mu, \lambda) = (0, \lambda_i)$. Enfin, les points de branchement λ_i sont des projections de P_i sur le plan \mathbb{C} . Un ensemble comme celui représenté à la figure 5 est un revêtement ramifié. Ainsi, les points de la surface sont en bijection avec les points du revêtement. Topologiquement, un voisinage d'une coupure liant deux plans est un tuyau liant deux sphères.

Enfin, la surface composée de deux copies de $\overline{\mathbb{C}}$ collées par une coupure est elle-même topologiquement équivalente à une sphère. Ainsi, le collage d'une sphère par une coupure ne change pas le genre de la surface (Voir la figure 6.).

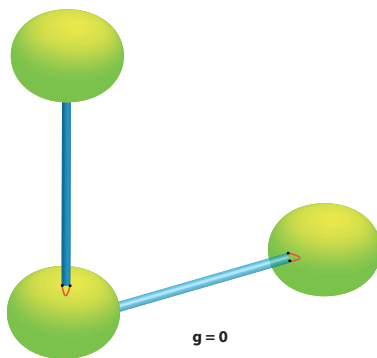


FIGURE 6. Ajouter une nouvelle sphère ne change pas le genre.

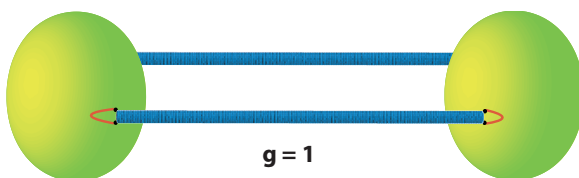


FIGURE 7. Ajouter une paire de tuyaux entre deux sphères augmente le genre de 1.

Cependant, avec deux coupures reliant deux plans, et donc deux tuyaux reliant deux sphères, il n’est pas possible de se ramener à une sphère ; nous obtenons ici un tore. Donc, avec deux coupures le genre augmente de un (voir la figure 7).

Le lien entre le diagramme de Hurwitz et les surfaces est le suivant : les feuilletts sont des sphères et les paires de points de ramification reliés par une coupure sont des tuyaux. La surface de la figure 6 donne une représentation topologique du revêtement ramifié de la figure 5. Le diagramme de Hurwitz correspondant à la surface de la figure 7 a 2 feuilletts et 4 points de ramification.

1.3. Homologie d’une surface

1.3.1. *Groupe d’homologie d’une surface.* Nous donnons d’abord la définition formelle d’homologie et ensuite nous parlerons de la même notion de façon plus intuitive à la fin de cette section.

Il existe en géométrie une notion qui généralise le concept de triangle et que l’on appelle simplexe ou n -simplexe. Nous dirons par exemple qu’un point est un 0-simplexe, qu’un segment de droite est un 1-simplexe, qu’un triangle est un 2-simplexe et qu’un tétraèdre est un 3-simplexe.

De plus, nous définissons un complexe simplicial :

Définition 3 (Complexe simplicial). *Un complexe simplicial est un ensemble fini K de simplexes dans \mathbb{R}^n tel que*

- (1) *si $s \in K$ et $t \subset s$, alors $t \in K$.*
- (2) *si $s, t \in K$ alors $s \cap t$ est soit vide, soit une face de s et de t .*

Ici une face d'un simplexe correspond à un sous-ensemble non-vide de ses sommets. Les faces d'un simplexe sont donc les enveloppes convexes des sous-ensembles de sommets. Nous avons aussi besoin de la notion de suite exacte et celle de p -chaîne.

Définition 4 (Suite exacte). *Une suite*

$$(5) \quad \cdots \rightarrow G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} \cdots$$

de groupes abéliens G_i et d'homomorphismes f_i est dite exacte pour G_1 si $\text{Im} f_1 = \text{Ker} f_2$. De plus, la suite sera dite exacte si elle l'est pour chaque groupe sauf pour le premier et le dernier groupe de la suite.

Définition 5 (p -chaîne). *Une p -chaîne dans K est une combinaison linéaire à coefficients entiers de p -faces du complexe simplicial K .*

Ensuite, nous disons que la dimension d'un complexe simplicial est n si n est la dimension maximale que peut avoir la face d'un simplexe pour tout simplexe dans K . S'il n'existe pas de tel n , alors le complexe simplicial est de dimension infinie.

Soient un complexe simplicial orienté K de dimension n , α_p le nombre de p -simplexes de K et pour $0 \leq p \leq n$, $\sigma_p^1, \dots, \sigma_p^{\alpha_p}$ les p -simplexes orientés de K . Pour un tel p , le p -ième groupe de chaîne de K , que nous notons $C_p(K)$, est un groupe abélien libre engendré par l'ensemble $\{\sigma_p^1, \dots, \sigma_p^{\alpha_p}\}$ pour l'addition formelle de simplexes. De plus, un élément de $C_p(K)$ est une combinaison linéaire de simplexes de la forme $\lambda_1 \sigma_p^1 + \dots + \lambda_{\alpha_p} \sigma_p^{\alpha_p}$ où $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Enfin, nous définissons le bord d'un simplexe $\sigma = (s_0 \cdots s_n)$, avec s_i les sommets du simplexe, comme la $(p-1)$ -chaîne $\partial \sigma = \partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i (s_0 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_p)$.

Soit

$$(6) \quad C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K).$$

Tout d'abord nous remarquons que les éléments de $\text{Ker} \partial_p$ sont des p -cycles (Un p -cycle étant une p -chaîne où le premier et le dernier sommets sont égaux.). Par ailleurs, $\text{Ker} \partial_p$ est un groupe abélien libre. De plus, $\text{Im} \partial_{p+1}$ est également un groupe abélien libre et ses éléments sont des p -bords. Comme tout bord est un cycle, il est possible de montrer que $\text{Im} \partial_{p+1} \subset \text{Ker} \partial_p$ et donc il existe un groupe quotient, $H_p(K) = \text{Ker} \partial_p / \text{Im} \partial_{p+1}$. Ce groupe quotient se nomme le p -ième groupe d'homologie de K et permet de savoir combien de p -cycles qui ne sont pas des bords le complexe simplicial K possède. Cela revient à connaître le nombre de cycles fermés non-triviaux différents de dimension p dans K . Il est possible d'obtenir plus de détails sur cette théorie en consultant [Gib77].

Dans cet article nous ne considérons que des surfaces et nous n'aurons besoin que des 0-simplexes, des 1-simplexes et des 2-simplexes. C'est pourquoi nous allons uniquement nous intéresser au premier groupe d'homologie de la surface. Dans ces conditions, les éléments du groupe d'homologie de la surface seront les classes d'équivalence des cycles fermés non-triviaux différents que l'on peut tracer sur la surface.

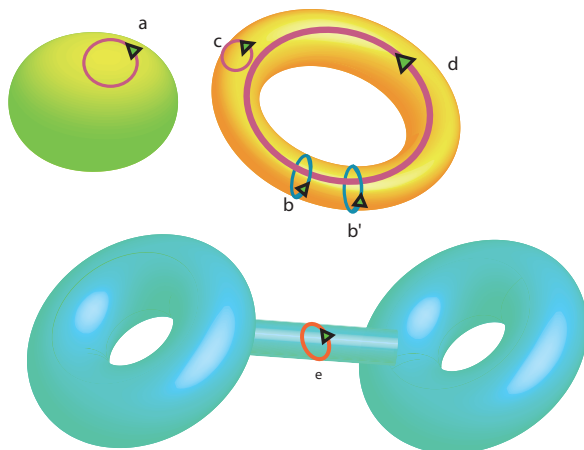


FIGURE 8. Les groupes d’homologie de la sphère, du tore et de la sphère à deux anses

Voyons comment trouver le premier groupe d’homologie des trois surfaces suivantes : la sphère, le tore et la sphère à deux anses. Soient a, b, b', c et d des 1-cycles (voir la figure 8). Nous remarquons que a et c bordent une région, tandis que b, b' et d n’en bordent aucune. Comme la courbe simple fermée b ne borde pas de région, cela indique la présence d’un trou dans le tore. La même déduction est vraie pour d .

Nous avons remarqué que a et c délimitent une région, ceux-ci sont dits homologues à 0 et nous les notons $a \sim 0$ et $c \sim 0$. De même, nous constatons que b et $-b'$ ensemble définissent un tuyau et donc une région. Cela veut dire que $b - b' \sim 0$ et donc $b \sim b'$. Ainsi, b et b' tournent autour du même trou du tore. De plus, a et c peuvent être rétrécis à un point. Enfin, e borde une région (la moitié de la surface), donc $e \sim 0$.

Il faut d’abord remarquer que nous pouvons formellement additionner les cycles sur une surface (comme nous avons fait ci-dessus en écrivant $b - b'$). Nous obtenons alors un groupe de cycles pour l’addition. Les bords forment un sous-groupe de ce groupe. Le groupe quotient cycles/bords se nomme le premier groupe d’homologie. Les éléments de ce groupe sont des cycles qui ne délimitent aucune région de la surface et donc, le nombre de générateurs de ce groupe est deux fois le nombre de trous de l’objet. De plus, b et d sont des éléments du premier groupe d’homologie du tore. Enfin, la sphère ne possède aucun générateur tandis que le tore en a deux. Ainsi, leur premier groupe d’homologie est respectivement 0 et \mathbb{Z}^2 .

1.3.2. *Groupe d’homologie relative d’une surface.* Il est aussi possible de trouver l’homologie relative d’une surface. Soit S un sous-ensemble d’une surface X . Identifions tous les points de ce sous-ensemble à un point. Cette manipulation transforme la surface. L’homologie de cette surface transformée est appelée l’homologie de la surface originale X relativement au sous-ensemble S et se note $H_1(X, S)$.

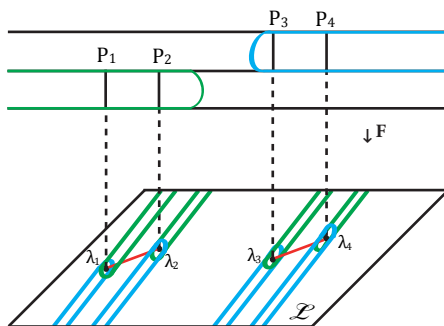


FIGURE 9. Deux systèmes de contours.

2. Problème de Riemann-Hilbert

Cette section donne une brève description du problème de Riemann-Hilbert. Il est possible d'obtenir plus de détails sur ce problème en consultant [Shr08].

Définissons d'abord deux ensembles de contours sur une surface de Riemann X . Considérons aussi une fonction méromorphe F telle que $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ et le diagramme de Hurwitz associé à F . Le premier système de contours sera la base des contours de gauche \mathcal{C}_j^l et le second système sera la base des contours de droite \mathcal{C}_j^r . Au voisinage de l'infini, les contours de droite sont parallèles à la droite d'argument $3\pi/2 - \phi$. Le contour \mathcal{C}_j^r encercle le point de branchement, λ_i , dans $\overline{\mathbb{C}}$ et revient vers l'infini en restant parallèles à la droite. De même, les contours de gauche resteront parallèles à la droite d'argument $\pi/2 - \phi$ au voisinage de l'infini et encerclent aussi les points de branchement avant de revenir vers l'infini tout en restant parallèle à cette dernière droite. Les contours de gauche sont toujours dans la direction opposée de celle des contours de droite (Voir la figure 9.).

Nous pouvons ensuite lever les contours vers la surface à l'aide du diagramme de Hurwitz. Cette opération est faite de sorte que F projette les contours sur la base du revêtement. Sur le diagramme de Hurwitz, lorsque nous encerclons un point de ramification, nous revenons à l'infini mais sur un autre feuillet (Voir la figure 9.).

Les deux systèmes de contours forment deux ensembles générateurs dans le groupe d'homologie de la surface X relativement à un certain sous-ensemble $Y \subset X$.

La façon dont les systèmes de contours de « gauche » et de « droite » sont définis et comment l'ensemble Y est construit sont décrits en détail dans [Shr08]. Dans cet article, l'auteure cherche à construire deux fonctions à valeurs matricielles Ψ_l et Ψ_r telles que chaque fonction a de bonnes propriétés dans un des deux demi-plans du plan complexe. Les deux demi-plans sont séparés par une droite l qui forme un angle ϕ avec la droite réelle. Les valeurs des deux fonctions sur la droite l sont reliées par multiplication d'une matrice à valeurs constantes que appelée matrice de Stokes. La relation entre ces matrices est donnée par :

$$(7) \quad \Psi_l(z) = \Psi_r(z)S \quad \text{si} \quad z \in l.$$

Ensemble, les deux fonctions à valeurs matricielles peuvent être vues comme une seule fonction dans $\overline{\mathbb{C}}$ qui possède une discontinuité (un saut) de type (7) sur la droite l . Une telle fonction donne une solution au problème de Riemann-Hilbert qui est traité dans [Shr08]. De plus, il a été montré dans [Shr08] que les deux fonctions à valeurs matricielles Ψ_l et Ψ_r peuvent être exprimées comme les intégrales de certaines différentielles définies sur la surface de Riemann correspondante par rapport aux deux systèmes de contours définis plus tôt, les C_j^l et les C_j^r , où $j = 1, \dots, n$.

Il s'avère que les expressions pour Ψ_l et Ψ_r ne diffèrent que par leurs contours d'intégration, c'est-à-dire que les vecteurs des différentielles intégrés sur les contours C_1^r, \dots, C_n^r donnent les colonnes de la matrice Ψ_r et ces mêmes vecteurs intégrés sur les contours C_1^l, \dots, C_n^l donnent les colonnes de la matrice Ψ_l . Ainsi, la matrice de Stokes S n'est qu'une matrice de transformation du système des contours de « droite », les C_1^r, \dots, C_n^r , vers le système des contours de « gauche », les C_1^l, \dots, C_n^l .

Donc, calculer la matrice de Stokes d'un problème du Riemann-Hilbert donné revient à calculer la transformation entre les deux ensembles générateurs de $H_1(X, Y)$; de là l'importance de calculer une telle transformation.

3. Matrice de Stokes avec infini non branché

Dans [Shr08], les transformations entre les deux systèmes de contours ont été trouvées pour des revêtements ramifiés où seuls les points finis étaient des points de ramification. Dans cette section, nous ne faisons que rappeler les relations existant entre les systèmes de contours pour certains revêtements sans entrer dans les détails. Ces relations pourront être comparées à celles obtenues dans section suivante où l'infini est aussi un point de ramification. La notation utilisée pour représenter un diagramme de Hurwitz est $\mathcal{H}_{g;p_1, \dots, p_i, \dots, p_n}$ où g est le genre de la surface et p_i , $i = 1, \dots, n$, est l'ordre de ramification du ou des points à l'infini. C'est-à-dire le nombre de feuillets -1 que le i -ème point de branchement à l'infini relie.

Pour le revêtement $\mathcal{H}_{0;0,0}$, les contours sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} C_1^l &= C_1^r - 2C_2^r \\ C_2^l &= C_2^r \end{aligned}$$

et la matrice de Stokes est

$$\mathbf{S}^{0;0,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le revêtement $\mathcal{H}_{0;0,0,0}$ de la figure 9 ou 5, les relations sont les suivantes :

$$C_1^l = C_1^r - 2C_2^r - C_3^r + C_4^r$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_2^l &= \hat{C}_2^r + \hat{C}_3^r - \hat{C}_4^r \\ \hat{C}_3^l &= \hat{C}_3^r - 2\hat{C}_4^r \\ \hat{C}_4^l &= \hat{C}_4^r\end{aligned}$$

et la matrice de Stokes associée est :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{0;0,0,0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{0;0,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{S}^{0;0,0} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour le revêtement $\mathcal{H}_{1;0,0}$ les relations associées sont :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1^l &= \mathcal{C}_1^r - 2\mathcal{C}_2^r + 2\mathcal{C}_3^r - 2\mathcal{C}_4^r \\ \mathcal{C}_2^l &= \mathcal{C}_2^r - 2\mathcal{C}_3^r + 2\mathcal{C}_4^r \\ \mathcal{C}_3^l &= \mathcal{C}_3^r - 2\mathcal{C}_4^r \\ \mathcal{C}_4^l &= \mathcal{C}_4^r\end{aligned}$$

De plus, la matrice de Stokes est :

$$\mathbf{S}^{1;0,0} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{0;0,0} & \mathbf{0} \\ -2\mathbf{A} & \mathbf{S}^{0;0,0} \end{pmatrix}.$$

4. Matrice de Stokes avec infini branché

Dans [Shr08], tous les revêtements étudiés n'ont pas de point de branchement à l'infini. Dans cette section nous nous intéressons aux mêmes revêtements que précédemment, mais en déplaçant le point le plus à droite du diagramme de Hurwitz vers l'infini afin que celui-ci soit branché. Dans ce cas, nous identifions les points à l'infini de deux feuillets adjacents au même point.

Remarque 1. Rappelons que les contours $\{\mathcal{C}_j^r\}$ et $\{\mathcal{C}_j^l\}$ sont des éléments de l'homologie relative $H_1(X, Y)$ pour un certain $Y \subset X$. La structure de Y et donc de $H_1(X, Y)$, est telle que la direction d'approche de l'infini par $\{\mathcal{C}_j^r\}$ peut être modifiée dans l'intervalle $(\frac{3\pi}{2} - \phi, \frac{\pi}{2} - \phi)$ sans changer la classe de \mathcal{C}_j^r dans $H_1(X, Y)$ (Voir [Shr08]). C'est-à-dire qu'une rotation dans le sens horaire de \mathcal{C}_j^r dans un voisinage de ∞ ne change pas de classe de contour. Une déformation quelconque loin de ∞ est également permise.

Le diagramme de Hurwitz correspondant à $\mathcal{H}_{0,1}$ est donné à la figure 10. En déformant les contours de façon continue, nous trouvons que $\mathcal{C}_1^l = \mathcal{C}_1^r$. Ainsi, la matrice de Stokes de ce revêtement est donnée par

$$\mathbf{S}^{0;1} = 1.$$

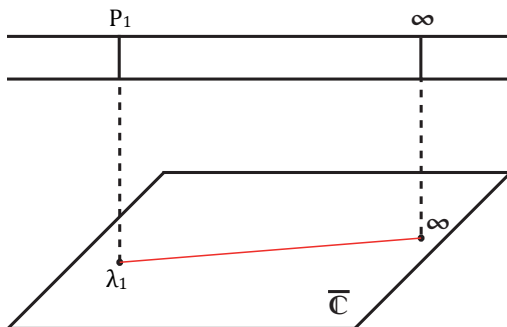


FIGURE 10. Diagramme de Hurwitz du revêtement $\mathcal{H}_{0;1}$

Nous montrerons une méthode pour trouver les contours à partir du revêtement $\mathcal{H}_{1;1}$. Les relations de contours dans les revêtement $\mathcal{H}_{0;1}$ et $\mathcal{H}_{0;0,1}$ se trouvent de la même façon. Le diagramme de Hurwitz correspondant au revêtement $\mathcal{H}_{1;1}$ est donné à la figure 11.

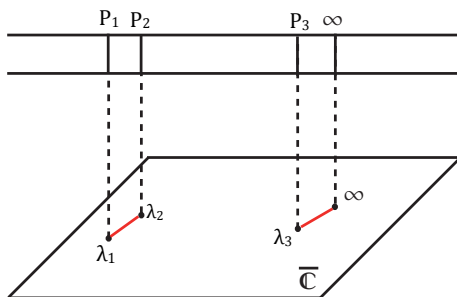


FIGURE 11. Diagramme de Hurwitz du revêtement $\mathcal{H}_{1;1}$

Il est souvent plus commode de faire des manipulations sur les contours en choisissant la représentation de la figure 12. Le segment uni indique que le contour se trouve sur le premier feuillet tandis que le segment pointillé qu'il est plutôt sur le deuxième.

Débutons avec les contours du point P_3 que nous pouvons voir à la figure 13. Ici, nous n'avons pas besoin de tenir compte des autres contours parce que la rotation du contour de droite se fait dans le sens horaire vers le contour de gauche. Celui-ci ne risque donc, pas de rencontrer d'autre point de branchement. Nous gardons également le contour de gauche à droite de l'image afin de nous rappeler l'objectif à atteindre.

Nous pouvons tirer le contour pointillé et lui faire traverser la coupure. En la traversant, le contour change de feuillet (Voir la figure 14). Nous déformons ensuite le contour dans le voisinage de P_3 pour obtenir la figure 15. Puis, nous

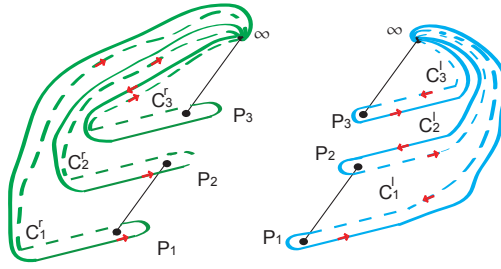


FIGURE 12. Représentation plus pratique de $\mathcal{H}_{1,1}$

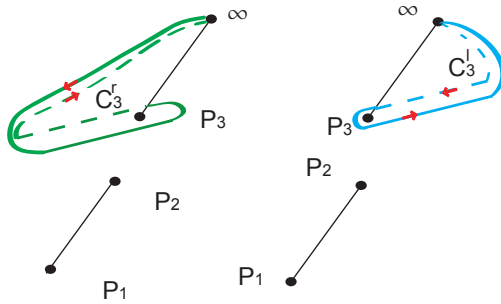


FIGURE 13. Relations de contours pour le point P_3

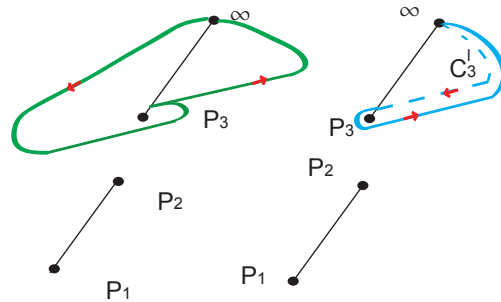


FIGURE 14. En traversant la coupure, cette partie du contour change de feuillet.

tirons l'autre partie du contour pour la faire traverser la coupure. Ceci nous donne la figure 16 et nous remarquons que les deux contours sont identiques. Cela veut dire que $\mathcal{C}_3^r = \mathcal{C}_3^l$ car nous n'avons que déformé \mathcal{C}_3^r de la façon permise dans la Remarque 1.

Dans la section précédente nous avons vu que pour le point P_2 , la relation entre les contours était donnée par $\mathcal{C}_2^l = \mathcal{C}_2^r - 2\mathcal{C}_3^r + 2\mathcal{C}_4^r$. Il serait tout à fait raisonnable de supposer que cette relation est conservée mais en supprimant le contour de P_4 puisque c'est le point ∞ qui le remplace. Dans l'image suivante (la figure 17), nous avons tracé le contour \mathcal{C}_2^r et nous lui avons ajouté un premier $-\mathcal{C}_3^r$ puisque le contour est de signe opposé dans cette relation. Voyons si nous avons suffisamment d'éléments pour obtenir le contour de gauche. Il est important de

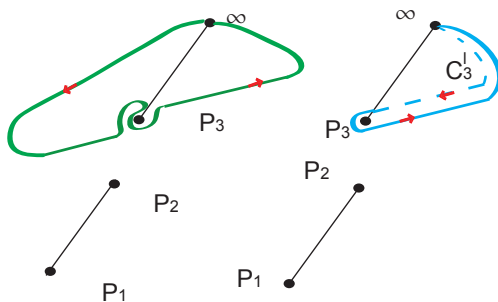


FIGURE 15. Nous déformons le contour comme indiqué à la Remarque 1.

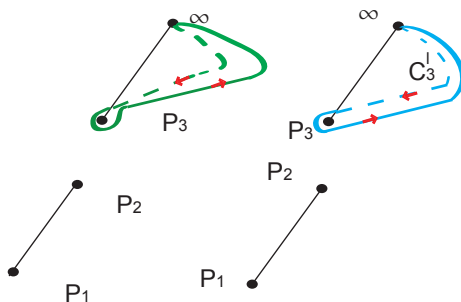


FIGURE 16. Cette dernière manipulation montre que $\mathcal{C}_3^r = \mathcal{C}_3^l$.

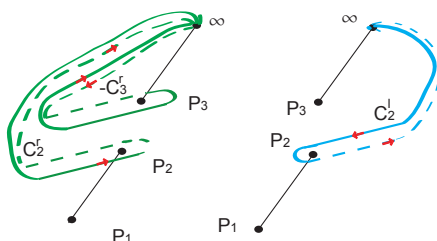


FIGURE 17. Nous débutons avec les contours \mathcal{C}_2^r et $-\mathcal{C}_3^r$.

mentionner qu'ici il faut tenir compte du point de branchement P_3 car la rotation du contour de droite au point P_2 va rencontrer cet autre point.

Les deux prochaines étapes se passeront de commentaires puisqu'elles correspondent exactement aux mêmes manipulations réalisées pour P_3 .

Visiblement, ces deux contours ne sont pas suffisants pour obtenir l'image de droite. Ajoutons un second contour de la forme $-\mathcal{C}_3^r$ (en mauve dans la figure 18). Nous pouvons maintenant déplacer certaines parties des contours près de la coupure dans un voisinage de P_3 pour obtenir la figure 19.

Le contour \mathcal{C}_2^r est équivalent à celui que nous obtenons à la figure 20 puisque ce contour approche et revient vers l'infini dans les mêmes directions que \mathcal{C}_2^r . Il ne s'agit encore une fois qu'une transformation près des points de branchement.

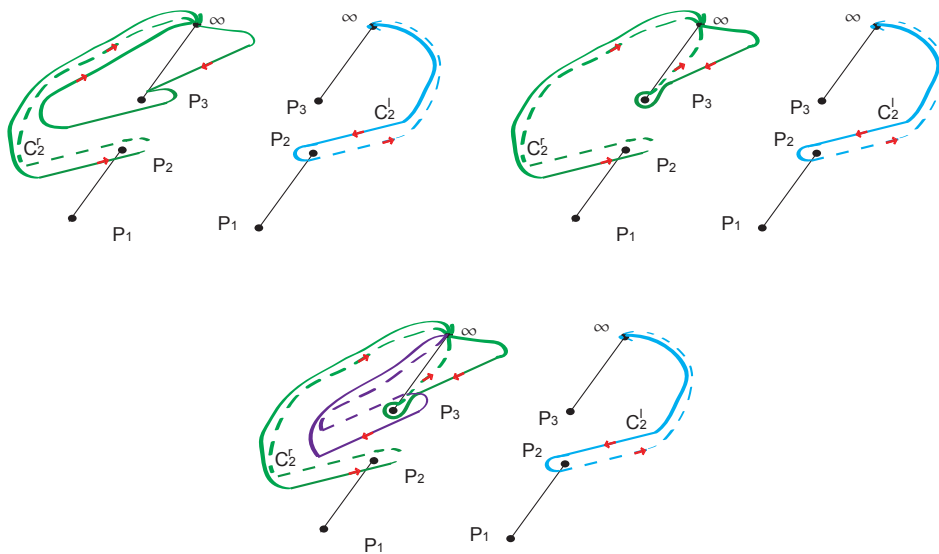


FIGURE 18. Ajoutons un second contour de la forme $-\mathcal{C}_3^r$.

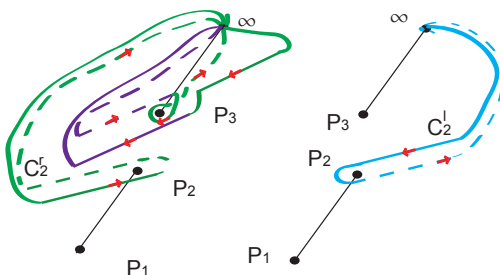


FIGURE 19. Quelques manipulations près de la coupure

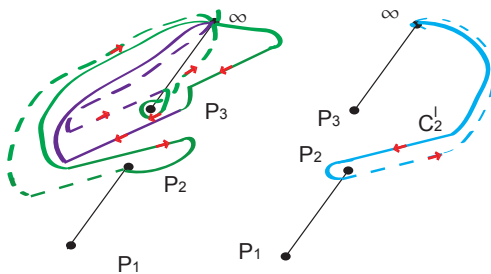


FIGURE 20. Cette manipulation donne un contour équivalent à \mathcal{C}_2^r .

Ensuite, nous tirons la partie en vert et en mauve du contour sur le premier feuillet (Voir la figure 21). Nous procédons de même pour la partie du contour sur le deuxième feuillet (Voir la figure 22.). Déplaçons légèrement les contours afin de clarifier la situation (Voir la figure 23.).

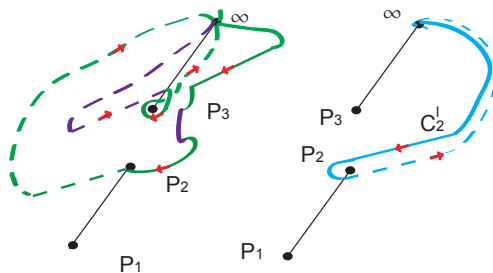


FIGURE 21. Nous déplaçons la partie du contour sur le premier feuillet vers la droite de la figure.

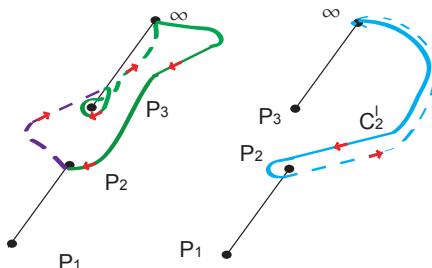


FIGURE 22. Nous déplaçons la partie du contour sur le deuxième feuillet vers la droite de la figure.

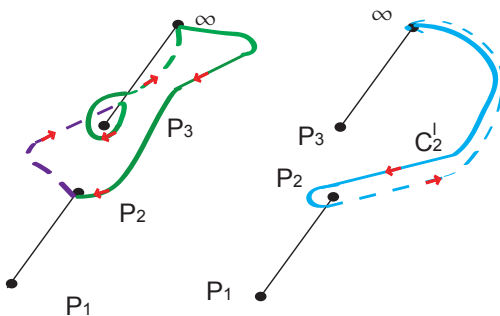


FIGURE 23. Léger déplacement du contour près de la coupure

Nous pouvons encore une fois déformer la partie du contour sur le deuxième feuillet. L'idée est d'obtenir un contour équivalent au nul autour de P_3 que nous pourrions enlever (Voir la figure 24.). Un tour complet autour d'un point de ramification simple est un élément nul dans l'homologie.

En reliant différemment certaines parties du contour, nous avons alors notre contour équivalent au contour nul et nous pourrions le supprimer à la prochaine étape (Voir la figure 25.).

Le contour ainsi obtenu est équivalent au contour de l'illustration de droite puisque la direction de départ et d'arrivée vers l'infini est la même et le contour se fait au même point de branchement (Voir la figure 26.).

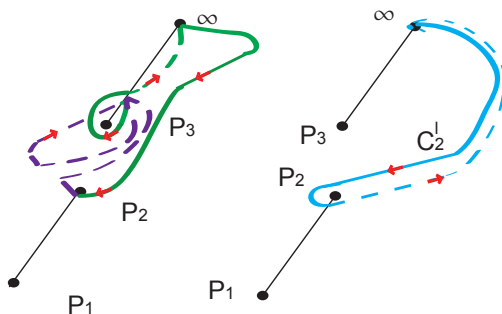


FIGURE 24. L'idée est d'obtenir un contour équivalent au nul autour de P_3 .

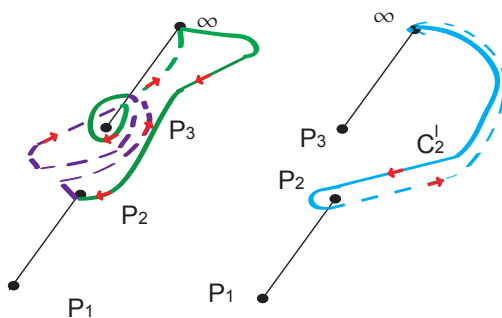


FIGURE 25. Un contour équivalent au nul autour de P_3 est obtenu.

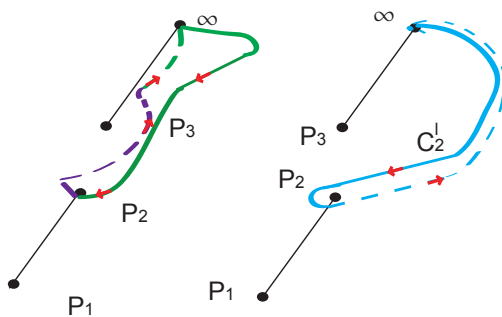


FIGURE 26. Le contour obtenu est équivalent au contour de l'illustration de droite.

En suivant la même idée, nous obtenons la relation de contours associée au point P_1 . Les relations obtenues sont alors :

$$C_1^l = C_1^r - 2C_2^r + 2C_3^r$$

$$C_2^l = C_2^r - 2C_3^r$$

$$\hat{C}_3^l = \hat{C}_3^r.$$

La matrice de Stokes correspondante est

$$\mathbf{S}^{1;1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, le diagramme de Hurwitz du revêtement $\mathcal{H}_{0;0,1}$ est presque identique à $\mathcal{H}_{0;0,0,0}$ de la figure 5, sauf pour le point P_4 qui est remplacé par le point à l'infini. Les relations de contours de ce revêtement sont

$$C_1^l = C_1^r - 2C_2^r - C_3^r$$

$$C_2^l = C_2^r + C_3^r$$

$$C_3^l = C_3^r$$

et la matrice de Stokes associée est :

$$\mathbf{S}^{0;0,0,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous constatons que le fait d'avoir l'infini comme point de branchement revient à supprimer la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice de Stokes obtenue avec tous les points de branchement finis. Ce résultat peut être déduit directement de la théorie des revêtements ramifiés en prenant la limite de la fonction méromorphe F .

5. Méthode des serpents et échelles

Parfois, il peut s'avérer ardu de trouver les relations entre les contours. Nous avons développé une méthode mnémotechnique afin de faciliter le calcul de la matrice de Stokes. Voici les règles à suivre. Soit X , une surface de Riemann et soit son diagramme de Hurwitz associé à une fonction $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Tout tracé de contour débute à la droite du diagramme de Hurwitz. Si le contour de gauche C_k^l dont on cherche la relation en termes de contours de droite est d'indice impair, il faut commencer sur le feuillet du bas du point P_k correspondant. Si le contour de gauche est d'indice pair, il faut commencer sur le feuillet du haut de ce contour. Une fois le point de départ identifié, nous nous déplaçons vers la gauche du diagramme de Hurwitz en respectant la règle suivante : à chaque fois que l'on rencontre le bas d'un point de branchement, il faut passer au feuillet du haut et écrire C_i^r . Au contraire, si l'on se retrouve sur le feuillet du haut, il faut passer au feuillet du bas et écrire $-C_i^r$, où i est l'indice du point de branchement rencontré. Lorsque nous avons fait cette opération pour le point de branchement P_k , nous poursuivons le tracé en se déplaçant vers la droite du diagramme de Hurwitz et en appliquant la même règle d'écriture des contours que plus haut. Le premier point de branchement sur lequel nous effectuons cette opération est le dernier rencontré avant P_k . Une fois rendu à l'extrémité droite du diagramme, nous faisons la somme des éléments inscrits. Cette somme correspond à la combinaison linéaire de contours de droite permettant d'exprimer C_k^l . Nous répétons le processus pour chaque contour de gauche, jusqu'à ce que nous ayons toutes les relations. Comme chaque relation correspond à la k -ième colonne de la matrice de Stokes, nous obtenons la matrice au complet une fois que tous les points de branchement auront été analysés.

Remerciements. L'auteur tient à remercier Vasilisa Shramchenko pour son aide et ses judicieux conseils tout au long de la réalisation du projet et de la rédaction de l'article. L'auteur tient également à remercier Caroline Hébert pour son soutien moral et pour son aide lors de l'utilisation du logiciel *Adobe Illustrator* dont sont issues les illustrations de l'article. Ce premier article lui est dédié.

Références

- [And05] James W. Anderson. *Hyperbolic geometry*. Springer, London, 2005.
- [Gib77] Peter John Giblin. *Graphs, Surfaces and Homology*. Chapman and Hall, London, 1977.
- [Shr08] Vasilisa Shramchenko. Riemann-hilbert problem associated to frobenius manifold structures on hurwitz spaces : irregular singularity. *Duke Mathematical Journal*, 144(1) :1-52, 2008.

FÉLIX BARIL BOUDREAU, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Felix.Baril.Boudreau@USherbrooke.ca