

# MUTATIONS DE CARQUOIS

GRÉGOIRE DUPONT

RÉSUMÉ. En 2001, Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky ont introduit un procédé combinatoire appelé *mutation* modifiant localement un carquois, c'est à dire un graphe orienté fini. L'application récursive de ce procédé à un carquois donné génère une liste de carquois qui peut être finie ou infinie. Le problème de la classification des carquois donnant une liste finie, bien que de nature simple, a demandé plusieurs années de travail avant d'être résolu par Anna Felikson, Michael Shapiro et Pavel Tumarkin en novembre 2008.

Dans cet article, nous introduisons de manière élémentaire la notion de mutation et présentons la classification de Felikson, Shapiro et Tumarkin d'un point de vue à la fois mathématique et épistémologique.

Cet article fait suite à un exposé donné au *Club Mathématique* de l'université de Sherbrooke en septembre 2009.

## Avant-propos

Dans cet article, nous présentons un bref chapitre de l'histoire contemporaine de la recherche en mathématiques à travers la formulation et la résolution d'un problème qui se situe dans un domaine jeune et en pleine expansion : les *algèbres amassées* de Fomin et Zelevinsky. Le lecteur averti pourra dans un premier temps être surpris du choix du sujet exposé. Les essais présentant l'histoire de problèmes mathématiques se concentrent habituellement sur des sujets plus établis et n'exposent que des percées aussi majeures que la démonstration du grand théorème de Fermat [Sin99] ou celle de la conjecture de Poincaré [Szp09]. Cependant, le but de cet article n'est pas tant de présenter une avancée importante des mathématiques que d'exposer en quelques pages certains rouages de la recherche contemporaine. L'exemple retenu l'a donc surtout été pour sa vertu pédagogique et pour sa facilité d'exposition. Mais au-delà de ces aspects, cet exemple expose tout de même des notions fondamentales de la recherche actuelle en mathématiques pures.

Le procédé de *mutation* dont il sera question tout au long de l'article est une notion qui a été définie au début des années 2000 par Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Bien que les motivations profondes des deux chercheurs se trouvent dans un monde mathématique très élaboré, la définition de la mutation peut se

faire en des termes simples et faciles à exposer. Et puisqu'il nous est impossible de motiver précisément ce procédé sans faire appel à d'amples prérequis, nous dirons simplement qu'il est dû à la perspicacité de Sergey Fomin et d'Andrei Zelevinsky, qui ont su observer une certaine régularité dans des domaines pointus de l'algèbre afin d'en déduire cette idée simple, élégante, unificatrice et incroyablement fertile qu'est la *mutation*.

Dans cet article, nous ne nous concentrerons que sur un aspect combinatoire des problématiques soulevées par la notion de mutation. Pour beaucoup d'entre elles, ces problématiques sont encore un objet d'étude. Cependant, on peut maintenant considérer que celle que nous exposons a été résolue, ou du moins qu'une des questions liées à cette problématique l'a été. La dernière section de cet article présente néanmoins d'autres problèmes connexes, ouverts pour la plupart. Encore une fois, le choix des problèmes présentés est arbitraire et pourrait être discuté d'un point de vue purement scientifique. Cependant, cette sélection de problèmes additionnels vise plus à souligner que la réponse à une question n'est pas une fin en soi mais plutôt le point de départ de nouvelles recherches.

J'apporterai enfin quelques mises en garde sur les spécificités de cet exemple. De prime abord, la façon dont j'ai choisi d'exposer le problème pourrait laisser entendre que la motivation principale dans la recherche mathématique est la pure curiosité. Il va sans dire que l'on ne pourrait ramener toutes les motivations de la recherche à la simple curiosité. Cependant, les motivations mathématiques les plus profondes sont aussi les plus difficiles à comprendre pour le grand public. La curiosité est quant à elle une motivation bien plus universelle, il m'a donc semblé naturel de m'y ramener. Aussi, l'échelle de temps sur laquelle un tel problème est résolu peut varier grandement d'une question à l'autre. Ici, il s'est écoulé une demi-douzaine d'années entre l'apparition du problème et sa résolution mais de manière générale, la résolution d'un problème peut occuper des décennies. Ceci étant, à un facteur de dilatation temporel près, l'essentiel des aspects de la résolution du problème que nous présentons forment un exemple représentatif de résolution d'un problème moderne.

Cet article ne nécessite aucun prérequis particulier. Afin d'en améliorer la lisibilité, j'ai fait le choix de certaines simplifications techniques, notamment concernant les triangulations de surfaces. Le lecteur pointilleux pourra se référer aux notes de bas de page ou à la bibliographie pour trouver les énoncés précis. Enfin, je ne donnerai que quelques preuves élémentaires susceptibles d'aider le lecteur à se familiariser avec les objets en jeu ; je laisse le soin au lecteur curieux de se référer à la bibliographie pour tenter de comprendre les preuves des énoncés avancés et ainsi que le cadre bien plus vaste dans lequel ces recherches trouvent réellement leur place.

## 1. Mutations de carquois

Comme cela a déjà été mentionné, l'objet central de notre étude est la *mutation*. Ce procédé a été introduit par Fomin et Zelevinsky dans un article prépublié

en 2001 comme un procédé combinatoire permettant de définir des structures algébriques fondamentales appelées *algèbres amassées*. Initialement, la mutation s'applique à deux types d'objets mathématiques distincts : des carquois et des familles de variables. Dans notre cas, nous ne nous intéresserons pas à la mutation des variables et en conséquence, nous ne nous intéresserons pas aux algèbres amassées à proprement parler. Nous restreindrons notre étude à la mutation des carquois et aux questions qu'elles soulèvent, indépendamment de la théorie des algèbres amassées.

DÉFINITION 1.1. (1) Un *carquois*  $Q$  est la donnée d'un ensemble  $S$  de sommets et d'un ensemble  $F$  de flèches entre ces sommets. On supposera toujours que  $S$  et  $F$  sont des ensembles finis.

(2) Un  *$p$ -cycle* dans  $Q$  est une suite de  $p$  flèches

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_p \rightarrow i_{p+1}$$

telle que les sommets  $i_1$  et  $i_{p+1}$  sont les mêmes.

(3) Une *boucle* est un 1-cycle, autrement dit, c'est une flèche dont les deux extrémités coïncident.

(4) Dans cet article, nous supposerons de plus qu'un carquois ne contient ni boucles ni 2-cycles.

Dans la suite, nous supposerons toujours que les carquois considérés sont *connexes*, c'est à dire que le graphe non-orienté obtenu en oubliant les orientations des flèches, appelé *diagramme sous-jacent*, est constitué d'un seul « morceau ». Si le carquois  $Q$  est constitué de plusieurs morceaux, appelés *composantes connexes*, alors, pour les notions auxquelles nous allons nous intéresser, l'étude de  $Q$  peut se ramener à l'étude de chacune de ses composantes connexes.

DÉFINITION 1.2. Soit  $Q$  un carquois et soit  $i$  un sommet de  $Q$ . La *mutation de  $Q$  en  $i$*  est le carquois  $\mu_i(Q)$  obtenu à partir de  $Q$  en appliquant les modifications locales suivantes :

(1) On inverse le sens de toutes les flèches rentrant ou sortant de  $i$  ;

---

1. La bibliographie à ce sujet est bien trop vaste pour être détaillée ici. Cependant, le lecteur intéressé pourra consulter les articles séminaux [FZ02, FZ03, BFZ05, FZ07] ou bien l'introduction plus élémentaire rédigée par Bertrand Nguefack dans un rapport de recherche du département de mathématiques de l'université de Sherbrooke [Ngu07].

2. Initialement, la mutation n'a en fait pas été définie sur des carquois mais sur des matrices. La passerelle entre la définition que nous allons utiliser et celle de Fomin et Zelevinsky se fait à l'aide des matrices d'incidence de carquois. C'est à dire qu'à un carquois  $Q$  nous faisons correspondre la matrice  $B_Q = (b_{ij})$  indexée par les sommets du carquois telle que  $b_{ij} = |\{i \rightarrow j\}| - |\{j \rightarrow i\}|$ . Cette correspondance existe du fait que les carquois que nous considérons ne contiennent ni boucles ni 2-cycles.

3. Cette terminologie est issue du folklore de la théorie des représentations. Dans les autres théories, une telle donnée est simplement appelée un *graphe orienté*.

- (2) Pour tous sommets  $k, j$  dans  $Q$  et  $r, s, t \geq 0$ , on remplace la configuration locale entre  $i, j$  et  $k$  dans  $Q$  comme suit :

dans $Q$	dans $\mu_i(Q)$
$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{r} & j \\ s \searrow & & \nearrow t \\ & i & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{r+st} & j \\ s \searrow & & \swarrow t \\ & i & \end{array}$
$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{r} & j \\ s \searrow & & \swarrow t \\ & i & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{r-st} & j \\ s \searrow & & \nearrow t \\ & i & \end{array}$

où la notation  $i \xrightarrow{n} j$  signifie qu'il y a  $n$  flèches allant de  $i$  vers  $j$  si  $n \geq 0$ , et  $(-n)$  flèches allant de  $j$  vers  $i$  si  $n < 0$ .

EXERCICE 1.3. Montrer que pour tout carquois  $Q$  et tout sommet  $i$  de  $Q$  :

- (1)  $\mu_i(Q)$  est à nouveau un carquois, c'est à dire qu'il ne contient ni boucles ni 2-cycles ;
- (2)  $\mu_i(\mu_i(Q)) = Q$ .

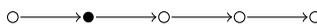
EXEMPLE 1.4. Considérons le carquois constitué d'un seul sommet et (nécessairement) d'aucune flèche. Alors toute mutation de  $Q$  laisse  $Q$  invariant.

EXEMPLE 1.5. Soit  $Q$  le carquois avec deux sommets, notés 1 et 2. Puisque nous ne considérons que des carquois connexes, sans boucles ni 2-cycles, il y a un nombre non-nul de flèches allant ou bien toutes du sommet 1 vers le sommet 2 ou bien toutes du sommet 2 vers le sommet 1. Ainsi, il existe un entier  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tel que

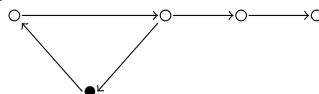
$$Q : 1 \xrightarrow{n} 2.$$

Si on applique une mutation en 1, on obtient le carquois  $\mu_1(Q) : 1 \xleftarrow{n} 2$ , noté  $Q^{op}$  et appelé *carquois opposé*. Il en est de même si on mute en 2. Une récurrence montre alors que les seuls carquois que l'on peut obtenir en appliquant des suites arbitraires de mutation à partir de  $Q$  sont  $Q$  et  $Q^{op}$ .

EXEMPLE 1.6. Considérons le carquois  $Q$  suivant :

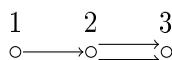


et opérons lui une mutation au second sommet en partant de la gauche, qui apparaît en grisé sur la figure. On obtient alors le carquois



On remarquera notamment que, contrairement aux exemples précédents, le diagramme sous-jacent au carquois a changé sous l'action de la mutation. La mutation ne se contente donc pas de changer le sens des flèches, elle modifie profondément la structure apparente du carquois.

EXERCICE 1.7. Considérer le carquois



et montrer que la suite de mutation  $\{(\mu_3\mu_2)^n(Q)\}_{n \geq 1}$  génère une infinité de carquois deux à deux distincts.

DÉFINITION 1.8. On dit que deux carquois  $Q$  et  $Q'$  sont *équivalents sous mutation* et on note  $Q \sim Q'$  si il existe une suite  $(i_1, \dots, i_n)$  de sommets de  $Q$  telle que  $Q' = \mu_{i_n} \circ \dots \circ \mu_{i_1}(Q)$ .

EXERCICE 1.9. Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence (*indication* : utiliser l'exercice 1.3).

On note

$$\text{Mut}(Q) = \{Q' \text{ carquois} \mid Q \sim Q'\}.$$

la classe d'équivalence de  $Q$  pour la relation  $\sim$ , appelée *classe de mutation de  $Q$* .

DÉFINITION 1.10. Un carquois  $Q$  est dit *de mutation finie* si  $\text{Mut}(Q)$  est un ensemble fini.

Une première observation immédiate est la suivante :

LEMME 1.11. *Un carquois ayant deux sommets est de mutation finie.*

PREUVE. *Cela suit de l'exemple 1.5.*

Comme nous l'avons vu lors de l'exercice 1.7, un carquois  $Q$  n'est pas nécessairement de mutation finie. La question de déterminer tous les carquois de mutation finie est alors naturelle. Cependant, la liste de *tous* les carquois de mutation finie est une formulation trop naïve du problème pour être vraiment pertinente. En effet, il est clair que si  $Q$  et  $Q'$  sont deux carquois équivalents sous mutation, il suit de la définition de  $\text{Mut}(Q)$  que  $\text{Mut}(Q) = \text{Mut}(Q')$ . Aussi, la façon dont on numérote les sommets d'un carquois ne modifie pas la classe d'équivalence de  $Q$ , deux carquois obtenus l'un de l'autre à partir d'un changement de numérotation seront dits *isomorphes*. Ainsi, on peut reformuler le problème de la manière suivante :

PROBLÈME 1.12. *Déterminer, à équivalence et à isomorphisme près, tous les carquois de mutation finie.*

Comme nous allons le voir, l'étude du problème 1.12 a évolué sous la forme de questions qui sont devenues de plus en plus précises et que l'on retrouve formulées ici dans les questions 2.3, 3.4, 4.12, 5.2 et enfin 6.1.

## 2. Les carquois de type Dynkin

Alors que le problème 1.12 n'était pas formulé clairement dans [FZ02], un premier élément de réponse est cependant déjà apparu dans [FZ03], prépublié en 2002 par Fomin et Zelevinsky. Dans cet article, les auteurs étudient des propriétés de finitude des algèbres amassées. De cette analyse naîtra une liste de carquois de mutation finie déjà bien connue des algébristes depuis le milieu du XXème siècle, appelés *carquois de type Dynkin*. C'est en fait l'apparition de cette liste qui va véritablement provoquer un engouement pour les algèbres amassées au début des années 2000. En particulier, c'est cette liste qui va susciter un intérêt plus clair pour le problème 1.12.

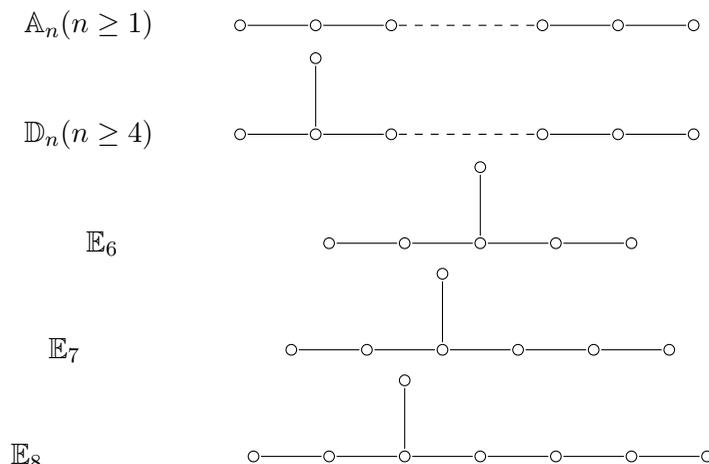


FIGURE 1. Diagrammes de Dynkin

DÉFINITION 2.1. Un carquois  $Q$  est dit *de type Dynkin* si il est une orientation de l'un des diagrammes se trouvant dans la figure 1.

THÉORÈME 2.2 (Fomin, Zelevinsky - 2002). *Un carquois de type Dynkin est de mutation finie*

On peut légitimement se demander d'où vient l'idée de regarder les carquois de type Dynkin plutôt que d'autres. Il serait trop long d'expliquer la motivation profonde en quelques lignes et nous dirons simplement que les diagrammes de Dynkin sont des objets combinatoires apparaissant de manière récurrente dans les classifications d'objets mathématiques. Ces diagrammes jouent notamment un rôle prépondérant dans la classification de certaines algèbres non-associatives, appelées *algèbres de Lie*, dont on sait qu'elles entretiennent des liens étroits avec les algèbres amassées. La démonstration du théorème 2.2 proposée dans [FZ03] repose notamment sur cette interaction entre algèbres de Lie et algèbres amassées. Il peut d'ailleurs sembler démesuré de faire appel à une telle théorie pour démontrer un résultat combinatoire comme celui que nous avons proposé mais, tel qu'énoncé, le théorème 2.2 n'est qu'un faible corollaire des résultats de Fomin et Zelevinsky qui s'intéressaient à une problématique bien plus vaste que celle du problème 1.12. Il faut en effet rappeler qu'à ce stade de l'histoire, le problème 1.12 restait encore parfaitement secondaire.

Au regard du théorème 2.2 et du lemme 1.11, on peut naturellement poser la question suivante :

QUESTION 2.3. *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont-ils :*

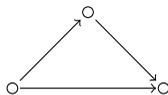
- (1) *Les carquois à deux sommets ;*

---

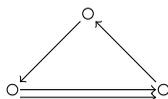
4. Il existe de très nombreux articles traitant du sujet de l'ubiquité des diagrammes de Dynkin en mathématiques, comme cela avait été souligné par Juan Carlos Bustamante lors d'un autre exposé au *Club Mathématique* dédié à cette ubiquité. Pour une introduction à ces diagrammes ainsi qu'à leur rôle en théorie des représentations, le lecteur pourra consulter le très accessible article d'Idun Reiten dans les Notices de l'AMS [Rei97]. Pour une référence plus complète, on pourra se référer à [HHSV77].

(2) *Les carquois de type Dynkin ?*

EXERCICE 2.4. Considérer le carquois  $Q$  suivant :



Montrer qu'à isomorphisme près, les deux seuls carquois contenus dans la classe de mutation de  $Q$  sont  $Q$  et le carquois



et en déduire que la réponse à la question 2.3 est non.

### 3. Les carquois affines

Après la prépublication de [FZ03], les algèbres amassées, jusqu'ici essentiellement étudiées aux États-Unis, sont devenues un sujet de recherche pour la communauté mathématique mondiale. Les très nombreuses publications mettent notamment en avant des liens entre les algèbres amassées et la théorie des représentation. Le problème combinatoire 1.12 se fait alors oublier pendant quelques années, jusqu'à ce qu'en 2005, deux norvégiens du nom d'Aslak Bakke Buan et d'Idun Reiten ne prépublient un court article abordant explicitement cette problématique du point de vue de la théorie des représentations [BR06].

Dans cette théorie, la liste de carquois de type Dynkin (Figure 1) admet un prolongement naturel avec une liste de carquois dits *affines* ou *euclidiens* (2).

---

5. Sergey Fomin est à l'université du Michigan et Andrei Zelevinsky à l'université Northeastern dans le Massachusetts.

6. Aslak Bakke Buan et Idun Reiten sont tous les deux à l'université NTNU de Trondheim.

7. On pourra encore une fois se référer à [Rei97] pour trouver les raisons d'être de cette liste.

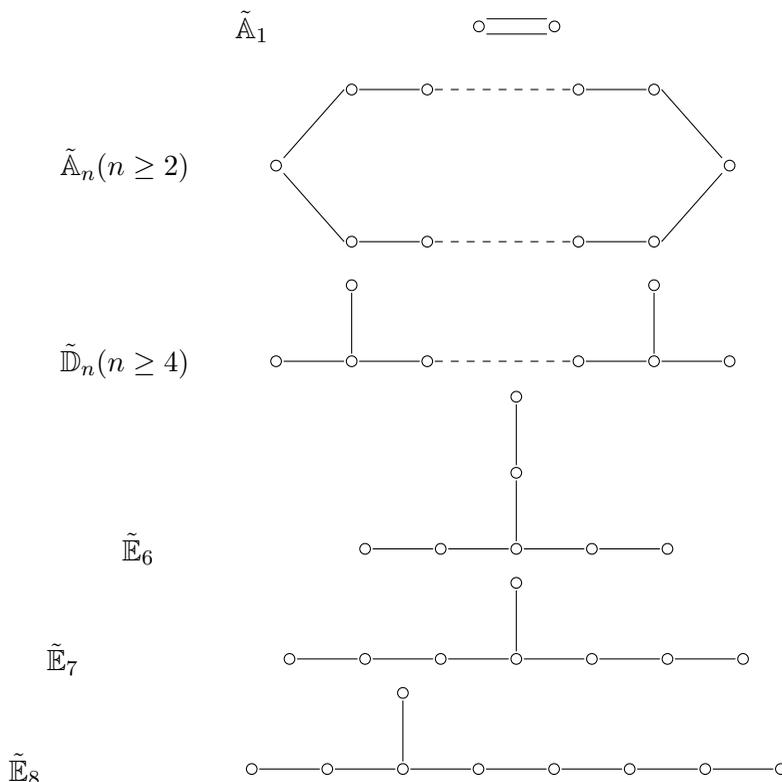


FIGURE 2. Diagrammes affines

DÉFINITION 3.1. Un carquois est dit *de type affine* si il est une orientation de l'un des diagrammes affines se trouvant dans la figure 2 et s'il ne contient pas de cycle orienté.

EXEMPLE 3.2. Le carquois de l'exemple 2.4 est un carquois de type affine  $\tilde{A}_2$ .

Le théorème 2.2 donne une condition suffisante pour qu'un carquois donné soit de mutation finie. Dans [BR06], Buan et Reiten donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un carquois soit de mutation finie, sous réserve qu'une condition d'« acyclicité » soit vérifiée.

THÉORÈME 3.3 (Buan-Reiten, 2005). *Soit  $Q$  un carquois ne contenant pas de cycles orientés, alors  $Q$  est de mutation finie si et seulement si l'une des trois assertions suivantes est vérifiée :*

- (1)  $Q$  a deux sommets ;
- (2)  $Q$  est équivalent à un carquois de type Dynkin ;
- (3)  $Q$  est équivalent à un carquois de type affine.

---

8. On prendra garde que pour les carquois de types affines, l'indice désigne le nombre de sommets du diagramme auquel on a soustrait 1, contrairement au cas Dynkin où il désigne le nombre de sommets. Par exemple, dans l'exemple 3.2, un carquois de type  $\tilde{A}_2$  contient bien trois sommets.

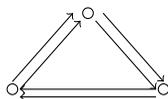
Contrairement à Fomin et Zelevinsky qui abordaient le problème 1.12 de manière détournée dans [FZ03], le théorème 3.3 de Buan et Reiten était le résultat central de [BR06]. Sans le formuler précisément dans leur article, ils posaient implicitement la question 1.12. Et à ce stade, au vu du théorème 3.3, la question 2.3 a donc évolué en la question suivante :

QUESTION 3.4. *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont-ils :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*
- (2) *Les carquois de type Dynkin ou affine ?*

La réponse à cette question est négative, comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 3.5. Au vu du théorème 3.3, il est clair que si l'on cherche à répondre négativement à la question 3.4, il faut trouver un carquois de mutation finie contenant des cycles orientés tel que tous les carquois équivalents sous mutation contiennent aussi des cycles orientés. Si on prend un simple 3-cycle, on voit en faisant une seule mutation, qu'il est de type Dynkin  $A_3$ . L'idée est donc de considérer le carquois suivant :



Une simple vérification (exercice) montre que toute mutation laisse ce carquois invariant. Sa classe de mutation est donc finie mais ce carquois n'est pas équivalent à un carquois de type Dynkin, ni à un carquois de type affine. Cela ne contredit pas pour autant le théorème 3.3 puisque tous les carquois (ou plus exactement le seul) de la classe de mutation contiennent des cycles orientés.

Cependant, cela prouve que la réponse à la question 3.4 est négative.

## 4. Les carquois géométriques

En 2006, Sergey Fomin, Michael Shapiro et Dylan Thurston ont prépublié une étude systématique des liens existants entre triangulations de surfaces et structures amassées. Dans leur article [FST08b], le problème 1.12 n'est pas central mais une section lui est cependant consacrée.

L'idée de Fomin, Shapiro et Thurston était d'associer un carquois à une surface triangulée à l'aide d'un procédé combinatoire. La généralité de leur construction la rend trop technique pour être reproduite précisément ici. On peut cependant s'en faire une juste idée sur l'exemple des triangulations d'un polygone.

---

9. Sergey Fomin et Michael Shapiro sont à l'université du Michigan et Dylan Thurston à l'université Columbia.

10. Cette étude est en fait une systématisation d'études précédemment menées par des équipes franco-canadiennes [CCS06] (prépublié en 2004) et franco-américaines [FG06] (prépublié en 2003).

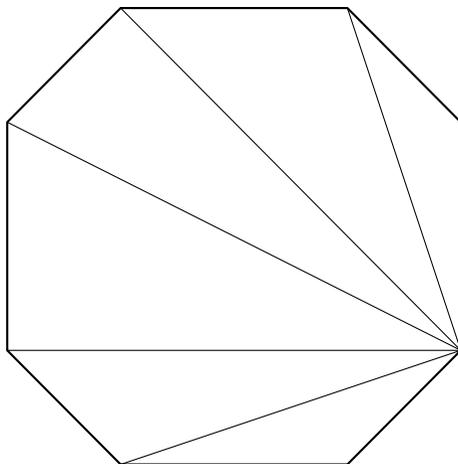
11. Le choix de l'exemple n'est pas anodin car c'est celui considéré dans [CCS06] et qui a motivé les travaux de Fomin, Shapiro et Thurston.

#### 4.1. Triangulations d'un polygone

On se fixe dorénavant un polygone  $\Pi$  ayant un nombre  $n \geq 3$  de côtés.

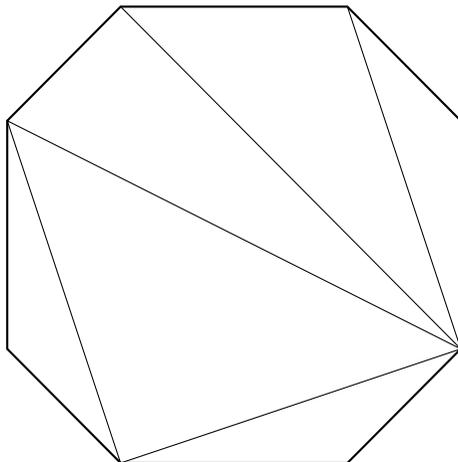
DÉFINITION 4.1. Une *triangulation* de  $\Pi$  est un ensemble  $T$  de diagonales de  $\Pi$  découpant la surface en triangles et ne s'intersectant pas deux à deux.

EXEMPLE 4.2. Soit  $\Pi$  un octogone régulier. Une triangulation de  $\Pi$  est par exemple donnée par la collection  $T$  de diagonales suivante :



On remarquera qu'étant donnée une triangulation  $T$  de  $\Pi$  et une diagonale  $d \in T$ , si on enlève  $d$  de  $T$ , on obtient un quadrilatère  $Q$  dans  $\Pi$  dont  $d$  était l'une des diagonales. Si  $d'$  désigne l'autre diagonale de  $Q$ , alors  $T \setminus \{d\} \sqcup \{d'\}$  donne une nouvelle triangulation de  $\Pi$ . On note  $f_d(T)$  la triangulation ainsi obtenue et l'opération consistant à remplacer  $T$  par  $f_d(T)$  est appelée *flip en  $d$  de  $T$* .

EXEMPLE 4.3. Si dans l'exemple ci-dessus on effectue un flip en la diagonale située en deuxième à partir du bas, on obtient la nouvelle triangulation  $T'$  suivante :



On remarquera que toutes les triangulations de  $\Pi$  ont le même nombre de diagonales (égal à  $n - 3$  dans le cas d'un  $n$ -gone). C'est un résultat qui reste vrai pour des surfaces arbitraires.

#### 4.2. Le carquois associé à une triangulation

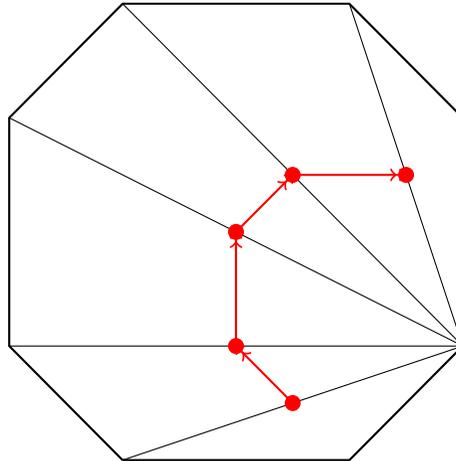
Suivant une idée de Philippe Caldero, Frédéric Chapoton et Ralf Schiffler, Fomin, Shapiro et Thurston ont associé à toute triangulation  $T$  d'une surface  $\Sigma$  un carquois  $Q_T$ . Dans le cas du  $n$ -gone que nous présentons ci-dessous, la construction est celle initialement présentée dans [CCS06].

Soit  $T$  une triangulation de  $\Pi$ . On se fixe une numérotation  $\{1, \dots, n - 3\}$  des diagonales dans  $T$ . Les sommets du carquois  $Q_T$  sont alors indexés par l'ensemble  $\{1, \dots, n - 3\}$ , en d'autres termes, ils sont indexés par les diagonales dans  $T$ . Étant données deux diagonales  $i$  et  $j$  de la triangulation  $T$  qui bordent un même triangle  $\Delta$ , on place une flèche de  $i$  vers  $j$  si, en faisant le pivot dans  $\Pi$  autour du point d'intersection de  $i$  et  $j$  dans le sens horaire, on passe d'abord par  $i$  puis par l'intérieur de  $\Delta$  puis par  $j$ . On fait cela pour toutes les diagonales de  $T$  et on obtient ainsi un carquois  $Q_T$  ayant  $n - 3$  sommets.

REMARQUE 4.4. On remarquera de plus qu'une diagonale  $d$  appartenant à une triangulation  $T$  ne peut appartenir qu'à au plus deux triangles formés par  $T$ . En conséquence, pour tout sommet  $i$  de  $Q_T$ , il existe au plus deux flèches sortant ou rentrant dans  $i$ .

DÉFINITION 4.5. Un carquois  $Q$  est dit *de type géométrique* si il existe une surface  $\Sigma$  et une triangulation  $T$  de  $\Sigma$  telle que  $Q = Q_T$ .

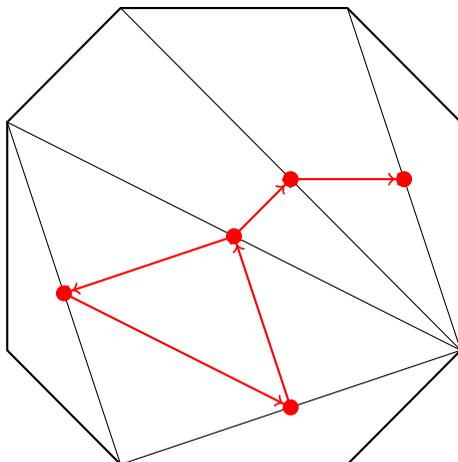
EXEMPLE 4.6. Si on reprend la triangulation  $T$  de l'octogone régulier de l'exemple 4.2, on obtient le carquois  $Q_T$  suivant :



et pour la triangulation  $T'$  de l'exemple 4.3, on obtient le carquois suivant :

12. Par surface arbitraire, nous entendons une surface de Riemann orientable de dimension 2, connexe et à bord. Dans ce cadre, le résultat découle du fait que le nombre de « diagonales » dans une triangulation dont le nombre de sommets est fixé est déterminé par la caractéristique d'Euler de la surface. Pour plus de détails sur le cadre général, on pourra se référer à [FST08b].

13. Philippe Caldero et Frédéric Chapoton sont à l'université de Lyon en France et Ralf Schiffler était alors à l'université Carleton à Ottawa.



### 4.3. Mutations et flips

L'un des résultats clés de [FST08b] consiste à observer que muter le carquois  $Q_T$  associé à une triangulation  $T$  d'une surface en un sommet  $d$  consiste à prendre le carquois  $Q_{T'}$  de la triangulation obtenue en effectuant un flip de  $T$  en la diagonale  $d$ . De manière plus formelle, le résultat s'énonce comme suit :

THÉORÈME 4.7 (Fomin-Shapiro-Thurston, 2006). *Soit  $\Sigma$  une surface,  $T$  une triangulation de  $\Sigma$ . Alors pour toute diagonale  $d$  de  $T$*

$$\mu_d(Q_T) = Q_{f_d(T)}.$$

EXEMPLE 4.8. Le carquois  $Q_T$  obtenu à partir de la triangulation  $T$  de l'octogone proposée dans l'exemple 4.2 est le carquois de type  $\mathbb{A}_5$  considéré à l'exemple 1.6. Les exemples 4.6 et 1.6 illustrent ainsi le théorème 4.7.

Du point de vue du problème 1.12 qui nous concerne, le corollaire essentiel est le suivant :

COROLLAIRE 4.9. *Un carquois de type géométrique est de mutation finie.*

PREUVE. *Dans le cas d'un polygone  $\Pi$ , il n'existe qu'un nombre fini de triangulations de  $\Pi$ . Puisque muter le carquois  $Q_T$  revient à prendre le carquois d'une autre triangulation de  $\Pi$ , il est clair que le nombre de carquois obtenus sera aussi fini.*

*Dans le cas d'une surface arbitraire  $\Sigma$ , il peut exister une infinité de triangulations. Cependant, pour toute triangulation  $T$  de  $\Sigma$  nous avons vu qu'en chaque sommet  $i$  de  $Q_T$ , il y a au plus deux flèches sortant et deux flèches rentrant dans  $i$ . Le nombre de carquois que l'on peut obtenir à partir de triangulations est donc borné par  $k^5$  où  $k$  est le nombre de diagonales dans une triangulation, qui est fixe et fini. En particulier, le nombre de carquois que l'on peut obtenir est fini.*

Certains carquois de mutation finie que nous avons précédemment construits sont en fait de types géométriques. Plus précisément, on a le résultat suivant :

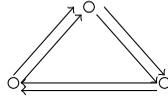
PROPOSITION 4.10 (Fomin-Shapiro-Thurston, 2006). (1) *Les carquois de types  $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \tilde{\mathbb{A}}, \tilde{\mathbb{D}}$  sont géométriques.*

(2) *Les carquois de types  $\mathbb{E}_n$  et  $\tilde{\mathbb{E}}_n$  pour  $n = 6, 7, 8$  ne sont pas géométriques.*

(3) *Les carquois à deux sommets ayant  $n > 2$  flèches ne sont pas géométriques.*

Cependant, l'ensemble des carquois géométriques contient aussi des carquois de mutation finie que nous n'avons pas précédemment classifiés, comme le montre l'exemple suivant.

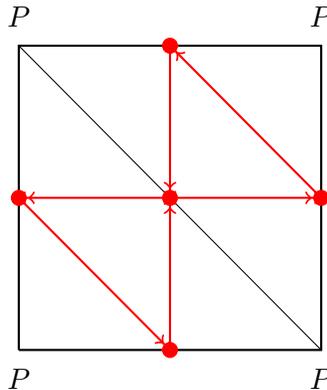
EXEMPLE 4.11. Le carquois



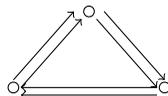
de l'exemple 3.5 est de type géométrique. Pour le montrer il faut utiliser une surface un peu plus compliquée qu'un simple polygone régulier et, faute de pouvoir donner une explication formelle, nous allons tenter de se donner une intuition du résultat.

La surface à considérer est un *tore*, autrement une surface topologiquement équivalente à un « donut » avec un point marqué  $P$ . La notion de diagonale dans un polygone est ici remplacée par la notion d'arc sans auto-intersection joignant  $P$  à  $P$ , considéré à déformation continue près. Une manière simple de se représenter un tore avec un point marqué est de considérer un quadrilatère régulier dont on a identifié les deux bords horizontaux et les deux bords verticaux (si vous n'êtes pas convaincu, prenez une feuille de papier et faites les collages) et dont le point marqué  $P$  est identifié avec les coins du quadrilatère.

On peut alors obtenir une triangulation du tore en prenant pour « diagonales » les côtés du quadrilatère ainsi que l'une de ses « vraies » diagonales. Le carquois  $Q_T$  obtenu est alors le suivant :



mais puisque les deux bords verticaux sont identifiés et les deux bords horizontaux sont aussi identifiés, il faut identifier les sommets correspondant dans le carquois  $Q_T$  et on obtient



et le carquois de l'exemple 3.5 est donc bien de type géométrique.

Ainsi, la question 3.4 devient :

QUESTION 4.12. *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont-ils :*

- (1) Les carquois à deux sommets ;
- (2) Les carquois de type  $\mathbb{E}_n$  et  $\tilde{\mathbb{E}}_n$  pour  $n = 6, 7, 8$ .
- (3) Les carquois de types géométriques ?

### 5. Les carquois elliptiques

Dans [FST08b], les auteurs ont aussi répondu négativement à la question 4.12 en observant trois carquois de mutation finie n'appartenant pas à la précédente liste. Ces trois nouveaux carquois sont appelés *elliptiques* de type  $\mathbb{E}$ .

DÉFINITION 5.1. Un carquois est dit *elliptique de type  $\mathbb{E}$*  si c'est un orientation d'un diagramme de type  $\mathbb{E}_6^{(1,1)}$ ,  $\mathbb{E}_7^{(1,1)}$  ou  $\mathbb{E}_8^{(1,1)}$  dans la figure 3 et si tous ses triangles sont orientés.

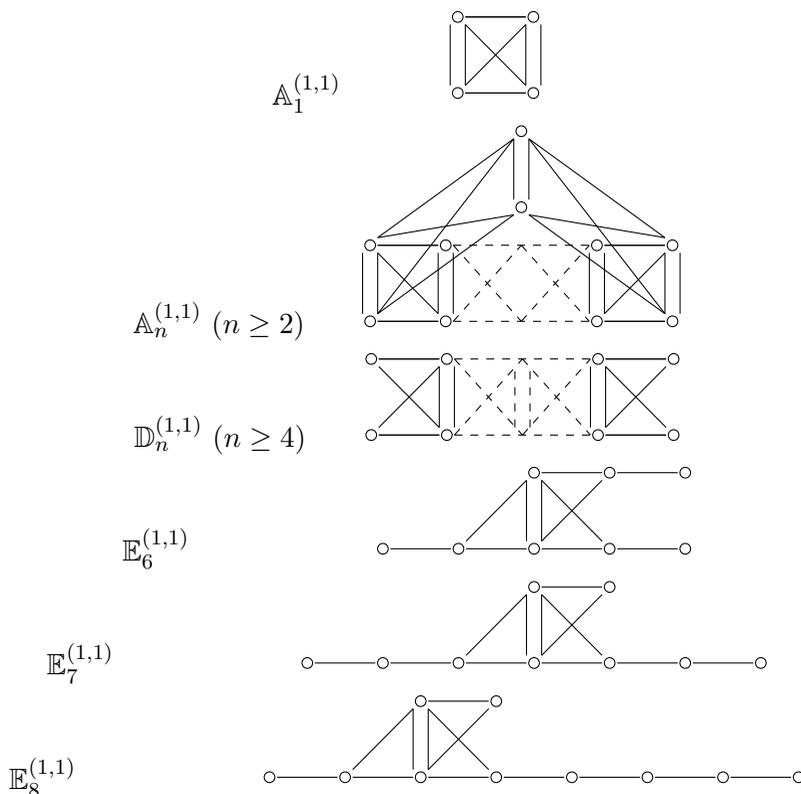


FIGURE 3. Diagrammes elliptiques

En géométrie algébrique, la notion de carquois elliptique peut être vue comme un prolongement de la suite Dynkin-affine. Il existe ainsi des carquois elliptiques de type  $\mathbb{A}$ , notés  $\mathbb{A}_n^{(1,1)}$ , de type  $\mathbb{D}$ , notés  $\mathbb{D}_n^{(1,1)}$  et trois carquois de type  $\mathbb{E}$  elliptiques .

---

14. Les carquois elliptiques ont été introduits par un chercheur japonais du nom de Kyoji Saito. Le lecteur expérimenté pourra par exemple consulter [Sai85] pour plus de détails.

De ce fait, il peut sembler naturel que si les carquois elliptiques de type  $\mathbb{E}$  apparaissent dans la liste des carquois de mutation finie puisque les carquois Dynkin  $\mathbb{E}$  et affines  $\mathbb{E}$  y apparaissent aussi. Mais on s'attendrait alors à ce que les carquois elliptiques de types  $\mathbb{A}^{(1,1)}$  et  $\mathbb{D}^{(1,1)}$  soient de mutation finie, si ce n'est géométriques. Or il est facile de vérifier que, mis à part  $\mathbb{D}_4^{(1,1)}$  qui est de type géométrique, tous les carquois de type  $\mathbb{A}_n^{(1,1)}$  et  $\mathbb{D}_n^{(1,1)}$  sont de mutation infinie !

Les carquois elliptiques de type  $\mathbb{E}$  semblaient donc apparaître dans la liste des carquois de mutation finie de manière « accidentelle ». Les calculs directs ont montré que ces carquois n'étaient pas de types géométriques mais possédaient des classes de mutation finies (les cardinalités de ces classes, à isomorphismes de carquois près, sont de 49 pour  $\mathbb{E}_6^{(1,1)}$ , de 506 pour  $\mathbb{E}_7^{(1,1)}$  et de 5739 pour  $\mathbb{E}_8^{(1,1)}$ ). Il faudra attendre trois années pour qu'en 2009, Michael Barot et Christof Geiss de l'UNAM au Mexique ne prépublient un argument profond éclairant le fait que les carquois de types  $\mathbb{E}^{(1,1)}$  sont de mutation finie [BG09]. Ces arguments font appel à la fois à la théorie des représentations et à la géométrie algébrique. Cependant, ces arguments n'expliquent pas fondamentalement pourquoi les carquois de type  $\mathbb{E}^{(1,1)}$  apparaissent alors que les carquois de types  $\mathbb{A}^{(1,1)}$  et  $\mathbb{D}^{(1,1)}$  n'apparaissent pas.

La question 4.12 devient alors la question suivante, formellement posée dans [FST08b, Problem 12.7] :

QUESTION 5.2. *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont-ils :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*
- (2) *Les carquois de type  $\mathbb{E}_n$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_n$  et  $\mathbb{E}_n^{(1,1)}$  pour  $n = 6, 7, 8$ .*
- (3) *Les carquois de types géométriques ?*

## 6. Les exemples de Derksen et Owen

En avril 2008, soit un peu moins de deux ans après la prépublication de [FST08b], Harm Derksen et Theodore Owen ont montré dans une courte prépublication que la liste proposée à la question 5.2 devait encore être enrichie de deux exemples très simples. Ces exemples sont donnés par les carquois obtenus en prenant une orientation de l'un des deux diagrammes de la liste en figure 4 de sorte que tous les cycles soient orientés.

Il peut sembler étonnant qu'il ait fallu presque deux ans pour trouver des exemples aussi simples mais ces exemples n'apparaissent clairement que si on prend le temps de réfléchir explicitement à la question 4.12. Or cette question était plutôt en marge du reste du développement de la théorie des algèbres amassées. De plus, si il est facile de montrer que les carquois  $\mathbb{X}_6$  et  $\mathbb{X}_7$  sont de mutation finie, il est tout de même moins aisé de montrer que ces carquois ne sont pas dans la liste précédemment obtenue.

Ainsi, la question 5.2 se précise finalement en la question suivante, posée par Derksen et Owen [DO08, Problem 15] :

---

15. Harm Derksen et Theodore Owen sont tous les deux à l'université du Michigan aux États-Unis.

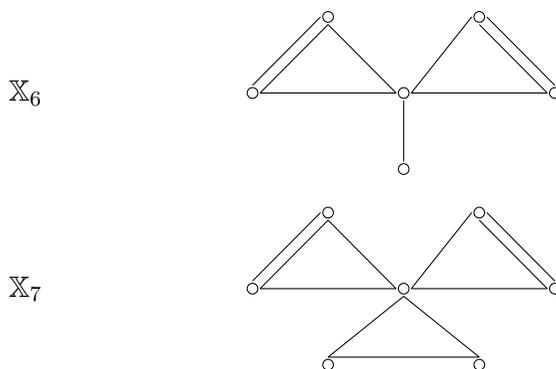


FIGURE 4. Diagrammes de Derksen et Owen

QUESTION 6.1. *Est-t-il vrai qu'à équivalence près, les carquois de mutation finie sont :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*
- (2) *Les carquois de types géométriques ;*
- (3) *Les carquois de types  $\mathbb{E}_n$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_n$  et  $\mathbb{E}_n^{(1,1)}$  pour  $n = 6, 7, 8$  ;*
- (4) *Les carquois de types  $\mathbb{X}_6$  et  $\mathbb{X}_7$  ?*

On remarquera au passage que, sans aller jusqu'à énoncer une conjecture formelle, les auteurs faisaient preuve d'un certain optimisme puisqu'ils énoncèrent la question précisément sous la forme rapportée ici.

## 7. La classification de Felikson, Shapiro et Tumarkin

C'est finalement en novembre 2008 que le problème est définitivement résolu dans une prépublication mise en ligne par Anna Felikson, Michael Shapiro et Pavel Tumarkin [FST08a]. La réponse à la question 6.1 est positive, autrement dit :

THÉORÈME 7.1 ([FST08a]). *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*
- (2) *Les carquois de types géométriques ;*
- (3) *Les carquois de types  $\mathbb{E}_n$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_n$  et  $\mathbb{E}_n^{(1,1)}$  pour  $n = 6, 7, 8$  ;*
- (4) *Les carquois de types  $\mathbb{X}_6$  et  $\mathbb{X}_7$ .*

La preuve présentée dans [FST08a] se fonde sur une analyse combinatoire poussée. La stratégie consiste à montrer que si un carquois est de mutation finie, alors il vérifie certaines conditions locales qui vont permettre de le rattacher à l'une des classes de carquois de mutation finie déjà construite. L'analyse était

---

16. Anna Felikson est à l'université de Moscou en Russie, Michael Shapiro à l'université du Michigan aux États-Unis et Pavel Tumarkin à l'université de Brême en Allemagne.

non-triviale puisqu'il a fallu pas moins de 49 pages aux auteurs pour arriver à cette preuve.

À l'heure où ces lignes sont écrites, l'article n'est pas encore officiellement paru dans une revue mathématique mais il a déjà reçu l'approbation de l'ensemble de la communauté mathématique.

## 8. Une fin ou un commencement ?

À strictement parler le problème 1.12 est donc maintenant résolu. Est-ce pour autant qu'une page des mathématiques se tourne ? La réponse à cette question est bien évidemment non ; une résolution de problème amène souvent plus de questions qu'elle n'a apporté de réponses.

### 8.1. Critère déterministe

Grâce au théorème de Felikson-Shapiro-Tumarkin, nous disposons maintenant d'une classification des carquois dont la classe de mutation est finie. Cependant, ce théorème ne permet pas de reconnaître en pratique si un carquois donné est de mutation finie ou non. Dans [FST08b], Sergey Fomin, Michael Shapiro et Dylan Thurston ont proposé une méthode pour reconnaître un carquois de type géométrique mais sur des carquois complexes, cette reconnaissance reste difficile à mettre en oeuvre.

Il existe à l'heure actuelle certains outils informatiques utiles pour reconnaître assez rapidement si un carquois est de mutation finie ou non (voir par exemple [DP10]) mais ils requièrent d'effectuer un certain (parfois grand) nombre de mutations à partir du carquois donné pour pouvoir trancher. Théoriquement, il devrait exister un critère pour reconnaître si un carquois  $Q$  donné est de mutation finie sans lui appliquer de mutation. Trouver un tel critère viendrait donc compléter le théorème de Felikson-Shapiro-Tumarkin en vue de son éventuelle application pratique.

### 8.2. Calcul de cardinalités

La combinatoire est souvent utile pour trouver des liens entre des domaines mathématiques apparemment disjoints. Ainsi, si un carquois  $Q$  est de mutation finie, le cardinal  $m(Q)$  de sa classe de mutation peut être un nombre intéressant à connaître car il pourrait permettre d'établir des bijections naturelles entre les classes de mutation de carquois et d'autres objets mathématiques. Par exemple, si  $Q$  est un carquois de type géométrique associé à une surface  $\Sigma$ , le nombre  $m(Q)$  donne des informations sur les triangulations possibles de  $\Sigma$ . Il est donc intéressant de pouvoir calculer ces nombres en général.

### 8.3. Généralisation

---

17. Des exemples de calculs, effectués à l'aide du logiciel QME [DP10], sont par exemple disponibles dans [Dup08, Annexe A] et des formules explicites ont notamment été obtenues pour tous les carquois de type Dynkin  $\mathbb{A}$  [Tor08] et de type Dynkin  $\mathbb{D}$  [BT09].

Dans cet exposé, nous nous sommes restreint aux carquois. Une théorie analogue peut être définie pour des graphes orientés munis de valuations. Le problème de la classification des graphes valués orientés de mutation finie est resté un problème ouvert jusqu'à très récemment. Ahmet Seven, avait notamment obtenu l'analogie du théorème 3.3 pour les graphes valués. L'analogie du théorème 7.1 a finalement été obtenu par les mêmes auteurs dans une récente prépublication datée de juin 2010 [FST10].

#### 8.4. Conceptualisation

« *Prédire n'est pas expliquer* » nous dit René Thom dans son excellent livre d'entretiens [Tho09]. Cette phrase d'un médaillé Fields s'attache à souligner la différence entre une théorie qui apporte des résultats quantitatifs explicites et une théorie qui apporte un éclairage qualitatif. Cette opposition fondamentale en sciences peut aussi s'adapter à notre étude en ce sens que la preuve existante de la classification de Felikson-Shapiro-Tumarkin répond clairement à un problème posé sans apporter d'éclairage théorique profond. Un tel éclairage n'est pourtant pas superflu. Ce qui intéresse généralement le mathématicien n'est pas tant le résultat lui-même que sa raison d'être.

Bien sûr, il est toujours nécessaire dans un premier temps d'établir la véracité des énoncés, quelle que soit la méthode. Souvent les premières preuves des grands énoncés ne sont pas très élégantes mais, une fois les énoncés établis, des mathématiciens travaillent souvent à comprendre plus profondément les résultats et ce n'est pas là une tâche inutile. En effet, pour le cas qui nous concerne, la découverte d'une nouvelle preuve mettant en jeu des interactions avec d'autres domaines mathématiques ou donnant un cadre unificateur apporterait une meilleure compréhension du problème.

De manière générale en mathématiques, toutes nouvelles interactions, tous nouveaux objets suffisamment généraux sont générateurs de nouvelles idées et, pour être « *efficace* » en science, une théorie doit être porteuse de cette « *généralité conceptuelle* » [Lam09, CC89] dont on voit bien qu'elle manque encore à la résolution du problème que nous avons choisi d'étudier. C'est d'ailleurs cette généralité qui a fait le succès de la découverte des algèbres amassées par Fomin et Zelevinsky, dont le problème que nous venons d'analyser n'est qu'un infime sous-produit.

## Références

- [BFZ05] Arkady Berenstein, Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras III : Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Mathematical Journal*, 126(1) :1–52, 2005. MR2110627 (2005i :16065).
- [BG09] Michael Barot et Christof Geiss. Tubular cluster algebras I : categorification. *arXiv :0905.0028v1 [math.RT]*, 2009.

---

18. Dans la terminologie classique, ce cas est appelé *non-simplement-lacé*. Dans le formalisme de [FZ02], le cas des carquois, c'est à dire des graphes orientés sans valuations, correspond aux mutations de matrices anti-symétriques. Le cas des graphes orientés valués correspond aux mutations de matrices anti-symétrisables, c'est à dire de matrices  $B \in M_n(\mathbb{Z})$  telles qu'il existe une matrice diagonale  $D \in M_n(\mathbb{Z})$  telle que  $DB$  est anti-symétrique.

19. Ahmet Seven est à la *Middle East Technical University* à Ankara en Turquie.

- [BR06] Aslak Bakke Buan et Idun Reiten. Acyclic quivers of finite mutation type. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 12804, 10, 2006.
- [BT09] Aslak Bakke Buan et Hermund André Torkildsen. The number of elements in the mutation class of a quiver of type  $D_n$ . *Electron. J. Combin.*, 16(1) :Research Paper 49, 23, 2009.
- [CC89] Jean-Pierre Changeux et Alain Connes. *Matière à penser*. Odile Jacob, 1989.
- [CCS06] Philippe Caldero, Frédéric Chapoton et Ralf Schiffler. Quivers with relations arising from clusters ( $A_n$  case). *Transactions of the AMS*, 358 :1347–1354, 2006. MR2187656 (2007a :16025).
- [DO08] Harm Derksen et Theodore Owen. New graphs of finite mutation type. *Electron. J. Combin.*, 15(1) :Research Paper 139, 15, 2008.
- [DP10] Grégoire Dupont et Matthieu Pérotin. Quiver Mutation Explorer. <http://pages.usherbrooke.ca/gdupont2/QME>, 2010.
- [Dup08] Grégoire Dupont. *Algèbres amassées affines*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338684/fr>, novembre 2008.
- [FG06] Vladimir Fock et Alexander Goncharov. Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (103) :1–211, 2006.
- [FST08a] Anna Felikson, Michael Shapiro et Pavel Tumarkin. Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type. *arXiv :0811.1703v1 [math.CO]*, 2008.
- [FST08b] Sergey Fomin, Michael Shapiro et Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes. *Acta Math.*, 201(1) :83–146, 2008.
- [FST10] Anna Felikson, Michael Shapiro et Pavel Tumarkin. Cluster algebras of finite mutation type via unfoldings. *arXiv :1006.4276v2 [math.CO]*, 2010.
- [FZ02] Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras I : Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15 :497–529, 2002. MR1887642 (2003f :16050).
- [FZ03] Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras II : Finite type classification. *Inventiones Mathematicae*, 154 :63–121, 2003. MR2004457 (2004m :17011).
- [FZ07] Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras IV : Coefficients. *Composition Mathematica*, 143(1) :112–164, 2007. MR2295199 (2008d :16049).
- [HHSV77] Michael Hazewinkel, Wim Hesselink, Dirk Siersma et Ferdinand Veldkamp. The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the  $A - D - E$  problem). *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 25(3) :257–307, 1977.
- [Lam09] Dominique Lambert. L’incroyable efficacité des mathématiques. *La recherche*, 316 :48–55, 2009.
- [Ngu07] Bertrand Nguefack. Introduction aux algèbres amassées : Définitions et exemples. *Rapports de recherche de l’université de Sherbrooke*, 41 :1–33, 2007.
- [Rei97] Idun Reiten. Dynkin diagrams and the representation theory of algebras. *Notices Amer. Math. Soc.*, 44(5) :546–556, 1997.
- [Sai85] Kyoji Saito. Extended affine root systems. I. Coxeter transformations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 21(1) :75–179, 1985.
- [Sin99] Simon Singh. *Le dernier théorème de Fermat*. Hachette, 1999.
- [Szp09] George Szpiro. *La Conjecture de Poincaré*. Points, 2009.
- [Tho09] René Thom. *Prédire n’est pas expliquer*. Flammarion, 2009.
- [Tor08] Hermund André Torkildsen. Counting cluster-tilted algebras of type  $A_n$ . *Int. Electron. J. Algebra*, 4 :149–158, 2008.