

FRISES ET TRIANGULATIONS DE POLYGONES

JEAN-SÉBASTIEN FRASER MARTINEAU ET DOMINIQUE LAVERTU

RÉSUMÉ. Dans un article de 1973, Conway et Coxeter étudiaient les propriétés de frises de nombres respectant une certaine "règle unimodulaire". Nous présentons la preuve de leur résultat qui établit une correspondance entre les triangulations de polygones et les frises de nombres entiers positifs.

1. Introduction

En 2002, Fomin et Zelevinsky [FZ02] ont introduit les algèbres amassées pour unifier l'étude de deux questions distinctes : celle de la positivité totale des matrices et celle des bases canoniques des algèbres enveloppantes quantiques.

En partant d'un carquois Q à n points, sans cycle de longueur ≤ 2 et d'un ensemble $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ de générateurs, appelé **amas**, on définit une certaine opération, appelée **mutation**, sur le carquois Q et sur l'amas \mathbb{X} .

Une algèbre amassée sans coefficients est la sous-algèbre du corps $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ des fractions rationnelles en n indéterminées ayant pour générateurs tous les amas \mathbb{X} obtenus par l'application successive de l'opération de mutation.

Fomin et Zelevinsky ont établi qu'une algèbre amassée est de type fini (c'est-à-dire engendrée par un nombre fini d'amas) si et seulement si Q est un carquois de Dynkin. Une famille particulière de carquois de Dynkin est la famille \mathbb{A}_n . C'est à partir de ces carquois que nous construirons les frises dont il sera question dans cet article. La fonction de frise, que nous définirons plus bas, est un cas particulier de la formule de mutation qui permet de passer d'un amas à un autre. C'est cette observation qui a permis récemment de faire le lien avec des travaux passés de Conway et Coxeter sur les frises [CC73].

L'article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, nous rappelons la définition géométrique des frises, leurs propriétés et leur classification. Les autres sections présentent les principaux résultats de [CC73]. Dans la section 3, nous étudions une fonction particulière qui permet de construire des frises. Dans la section 4, nous présentons une manière systématique d'engendrer toute une classe de frises d'intérêt. Dans la section 5, nous démontrons le résultat principal qui établit une bijection entre triangulations de polygones et frises.

2. Groupes de frise

On rappelle qu'une **isométrie** du plan \mathbb{R}^2 est une application bijective $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui préserve les distances (c'est-à-dire que si $x, y \in \mathbb{R}^2$, alors $|x - y| = |T(x) - T(y)|$). L'ensemble des isométries du plan \mathbb{R}^2 forme un groupe pour la composition des applications, qu'on appelle le **groupe des isométries** du plan et que l'on note $\mathcal{I}(\mathbb{R}^2)$. Un **groupe d'isométries** du plan est un sous-groupe de $\mathcal{I}(\mathbb{R}^2)$.

DÉFINITION 2.1. Un **groupe de frise** \mathcal{F} de centre c est un groupe d'isométries du plan tel qu'il existe une droite c invariante par les isométries de \mathcal{F} et tel que l'ensemble des translations de \mathcal{F} forme un groupe cyclique infini [Mar87].

Une **figure** est un sous-ensemble du plan.

DÉFINITION 2.2. Une **frise** est une figure invariante par l'action d'un groupe de frise.

Voici des exemples de frises :

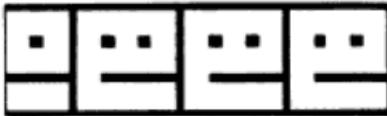
EXEMPLE 2.3. [Ced87]



EXEMPLE 2.4. [Mar87]



EXEMPLE 2.5. [Mar87]



Bien qu'il existe une infinité de frises, on peut les classer en 7 types, selon les isométries les laissant invariantes. Nous allons présenter sommairement cette classification, suivant [Ced87] et [Mar87].

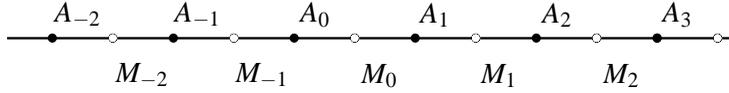
Toute frise est, en vertu de la définition de groupe de frise, invariante par translation. Notons τ un générateur du groupe cyclique infini des translations. C'est une translation minimale qui laisse la frise invariante.

Les autres isométries possibles d'un groupe de frise \mathcal{F} sont

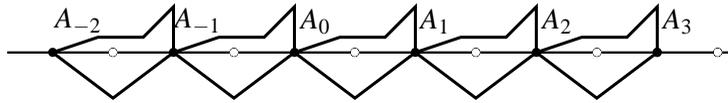
- une rotation ρ_A de π radians autour d'un point A sur la droite c ,
- une réflexion σ_c d'axe c ,
- une réflexion σ_a d'axe a perpendiculaire à c ,
- une transvection γ , c'est-à-dire une réflexion d'axe c suivie d'une translation.

Soit \mathcal{F} un groupe de frise. Si \mathcal{F} contient des rotations ρ de π radians, posons A le centre d'une de ces rotations. Si \mathcal{F} ne contient pas de rotations, mais contient des réflexions σ_a d'axe a perpendiculaire à c , posons a un axe d'une de ces réflexions et A l'intersection de c et a . Sinon, posons A comme étant n'importe quel point de c . Posons

$A_n = \tau^n(A)$. Posons $M = M_0$ le milieu de $\overline{A_0A_1}$ et $M_n = \tau^n(M)$ (ainsi M_n est le milieu de $\overline{A_nA_{n+1}}$).

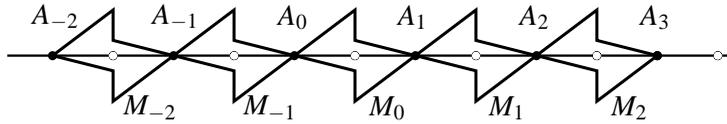


- (1) $\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$ est le groupe d'isométries d'une frise qui n'est invariante que par translation. Par exemple :



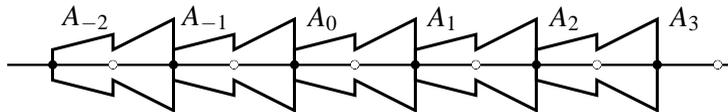
Également, l'exemple 2.5 appartient à ce type.

- (2) $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \rho_A \rangle$ ne contient pas de réflexions (ni d'axe vertical ni d'axe horizontal c) ni de transvection. Comme $\tau \circ \rho_A = \rho_M$, tous les points A_i, M_i sont des centres de rotation. Par exemple :

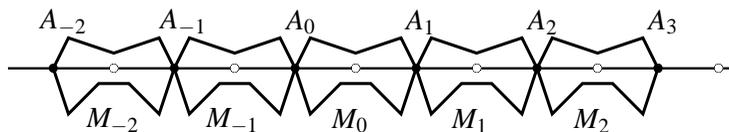


L'exemple 2.3 est aussi de ce type.

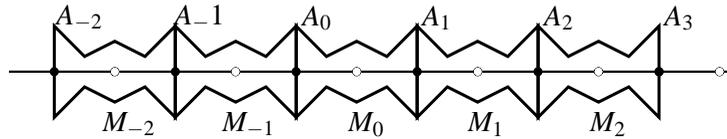
- (3) $\mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$ contient, en plus des générateurs, des transvections (qui sont la composition d'une translation et d'une réflexion d'axe c). Il ne contient ni rotation, ni réflexion d'axe vertical. Par exemple :



- (4) $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$ ne contient ni rotation, ni réflexion d'axe c , ni transvection. Il contient $\tau^{2i} \circ \sigma_a$ qui sont les réflexions d'axe perpendiculaire à c passant par A_i et contient aussi les réflexions d'axe perpendiculaire à c passant par M_i , données par $\tau^{2i+1} \circ \sigma_a$. Par exemple :

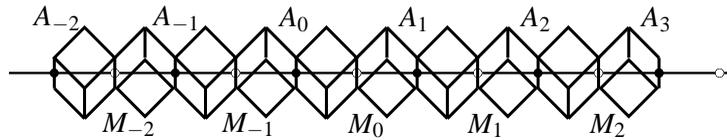


- (5) $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \rho_A, \sigma_c \rangle$ contient toutes les isométries des groupes de frise. En effet, on retrouve les transvections $\tau^n \circ \sigma_c$ et les réflexions d'axe vertical $\rho_{A_i} \circ \sigma_c$. Il contient aussi la rotation de centre M , $\rho_M = \tau \circ \rho_A$, les réflexions d'axe perpendiculaire à c passant par A_i , données par $\tau^{2i} \circ \sigma_a$, et les réflexions d'axe perpendiculaire à c passant par M_i , données par $\tau^{2i+1} \circ \sigma_a$. Par exemple :

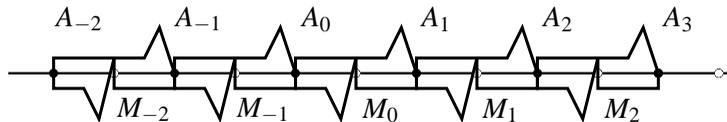


La frise de l'exemple 2.4 possède toutes les isométries ; elle est donc de ce type.

- (6) $\mathcal{F}_2^2 = \langle \tau, \rho_A, \sigma_p \rangle$, où p est la médiatrice du segment \overline{AM} , ne contient pas de réflexion d'axe c , mais contient $\rho_M = \tau \circ \rho_A$, la rotation de centre M . Aussi, $\sigma_p \circ \rho_A$ donne une transvection. Par exemple :



- (7) $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$ ne contient aucune autre isométrie que les translations et les transvections, car $\gamma^2 = \tau$. Par exemple :



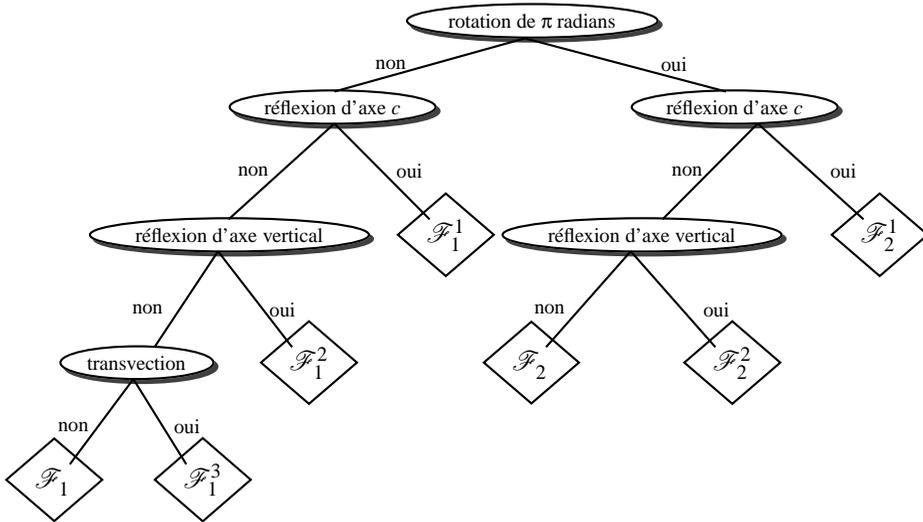
Le tableau [Ced87] résume ce qui précède.

groupe de frise	exemple de frise	τ	ρ_A	σ_c	σ_*	γ
\mathcal{F}_1	LLLLLLLL	✓	-	-	-	-
\mathcal{F}_2	NNNNNNN	✓	✓	-	-	-
\mathcal{F}_1^1	DDDDDDD	✓	-	✓	-	✓
\mathcal{F}_1^2	VVVVVVV	✓	-	-	✓	-
\mathcal{F}_2^1	HHHHHHH	✓	✓	✓	✓	✓
\mathcal{F}_2^2	$\Delta V \Delta V \Delta V \Delta$	✓	✓	-	✓	✓
\mathcal{F}_1^3	LFLFLFL	✓	-	-	-	✓

Note : $\sigma_* = \sigma_a$, sauf pour \mathcal{F}_2^2 où $\sigma_* = \sigma_p$.

Nous avons repris les notations des groupes de frise utilisées dans [Mar87]. Cette notation décrit les isométries de chaque groupe. En effet, l'indice 1 indique l'absence d'une rotation de π radians et l'indice 2, sa présence. L'exposant 1 indique la présence d'une réflexion d'axe c . L'exposant 2 indique qu'il n'y a pas de réflexion d'axe c , mais qu'il y a une réflexion d'axe perpendiculaire à c . L'exposant 3 indique que le groupe est engendré par une transvection.

Le classement des groupes se représente aussi graphiquement.



Cette classification des groupes de frise est complète. On peut trouver la démonstration de ce fait dans [Mar87].

3. Frises

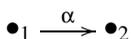
Passons à l'étude des frises de nombres.

DÉFINITION 3.1. Un **carquois** Q est un quadruplet (Q_0, Q_1, s, b) , où Q_0 est un ensemble dont les éléments sont appelés **points**, Q_1 est un ensemble dont les éléments sont appelés **flèches** et $s, b: Q_1 \rightarrow Q_0$ sont des applications qui associent à chaque flèche du carquois ce qu'on appelle sa **source** et son **but**, respectivement.

DÉFINITION 3.2. Étant donné un carquois Q , on définit le carquois $\mathbb{Z}Q$ par

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{Z}Q)_0 &= \mathbb{Z} \times Q_0 = \{(n, x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in Q_0\} \\
 (\mathbb{Z}Q)_1 &= \left\{ (n, \alpha) : (n, x) \rightarrow (n, y) \mid n \in \mathbb{Z}, x \xrightarrow{\alpha} y \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ (n, \alpha') : (n-1, y) \rightarrow (n, x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \xrightarrow{\alpha} y \right\}
 \end{aligned}$$

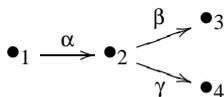
EXEMPLE 3.3. Si Q est le carquois



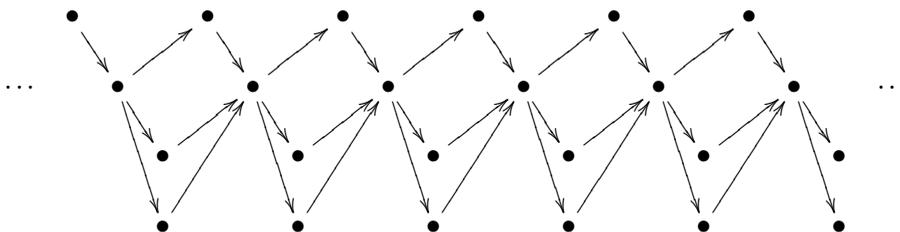
où $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$ et $s(\alpha) = 1$ et $b(\alpha) = 2$, alors on obtient le carquois $\mathbb{Z}Q$



EXEMPLE 3.4. Si Q est le carquois



où $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ et $s(\alpha) = 1$ et $b(\alpha) = 2$, $s(\beta) = 2$ et $b(\beta) = 3$, $s(\gamma) = 2$ et $b(\gamma) = 4$, alors on obtient le carquois $\mathbb{Z}Q$



DÉFINITION 3.5. Une **fonction de frise** est une fonction $f: (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que pour tout $(k, p) \in (\mathbb{Z}Q)_0$ on a

$$f(k, p)f(k-1, p) = 1 + \prod_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}Q)_1 \\ (l, q) \xrightarrow{\alpha} (k, p)}} f(l, q)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **carquois de type \mathbb{A}_n** est un carquois de la forme



Dans la suite, nous nous intéresserons spécifiquement aux frises sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$. Lorsque $n \geq 2$, la relation qui caractérise la fonction de frise peut s'écrire de la manière suivante :

$$f(k, p)f(k-1, p) = \begin{cases} 1 + f(k-1, p+1) & \text{si } p = 1, \\ 1 + f(k-1, p+1)f(k, p-1) & \text{si } 1 < p < n, \\ 1 + f(k, p-1) & \text{si } p = n. \end{cases}$$

Voici quelques exemples.

EXEMPLE 3.6.



Cette frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_1$ a pour groupe \mathcal{F}_2^1 , car on voit qu'elle est invariante par toutes les isométries possibles d'un groupe de frise. Remarquons que c'est la seule frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_1$ qui ne contienne que des entiers strictement positifs. En effet, comme le carquois ne contient pas de flèche, $\prod_{(l, q) \xrightarrow{\alpha} (k, p)} f(l, q) = 1$, car le produit est vide. Donc on cherche des solutions entières à $f(k, 1)f(k-1, 1) = 2$. La seule possibilité est $f(k, 1) = 1$ et $f(k-1, 1) = 2$ ou inversement.

PROPOSITION 3.10. *Une frise d'entiers positifs est entièrement déterminée par une diagonale.*

PREUVE. Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit de montrer qu'on peut calculer les diagonales adjacentes à partir de la diagonale fixée.

Calculons d'abord les éléments de la diagonale $k + 1$. Pour $p = 1$, on calcule le premier élément.

$$f(k+1, 1) = \frac{1 + f(k, 2)}{f(k, 1)}$$

On calcule ensuite le prochain élément en fonction de l'élément le précédant dans la diagonale. Pour $p \in \{2, \dots, n-1\}$,

$$f(k+1, p) = \frac{1 + f(k, p+1)f(k+1, p-1)}{f(k, p)}$$

et pour $p = n$,

$$f(k+1, n) = \frac{1 + f(k+1, n-1)}{f(k, n)}.$$

Calculons maintenant les éléments de la diagonale $k - 1$. On remarque qu'on calcule d'abord le dernier élément et les suivants en remontant la diagonale. Pour $p = n$,

$$f(k-1, n) = \frac{1 + f(k, n-1)}{f(k, n)},$$

pour $p \in \{n-1, \dots, 2\}$,

$$f(k-1, p) = \frac{1 + f(k, p-1)f(k-1, p+1)}{f(k, p)}$$

et pour $p = 1$,

$$f(k-1, 1) = \frac{1 + f(k-1, 2)}{f(k, 1)}.$$

Le fait suivant nous servira plus tard.

LEMME 3.11. *Il ne peut y avoir deux 1 consécutifs sur une rangée d'une frise d'entiers positifs.*

PREUVE. Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs. Si $n = 1$, il n'existe qu'une seule frise et le résultat est trivial (voir l'exemple 3.6). Si $n \geq 2$, examinons les cas possibles.

- Supposons qu'on retrouve deux 1 consécutifs dans la première rangée.



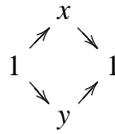
Alors $1 = \frac{1+x}{1}$, donc $x = 0$, ce qui est impossible car les éléments de la frise sont strictement positifs.

- Supposons qu'on retrouve deux 1 consécutifs sur la dernière rangée.



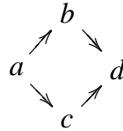
De la même manière, $x = 0$, une contradiction.

- Si $n \geq 3$, supposons que les deux 1 se trouvent sur une rangée intermédiaire.



Alors, $1 = \frac{1+xy}{1}$, d'où $xy = 0$, ce qui est impossible, car x et y sont non nuls, en vertu de l'hypothèse.

Une **maille** d'une frise est une portion de la frise de la forme

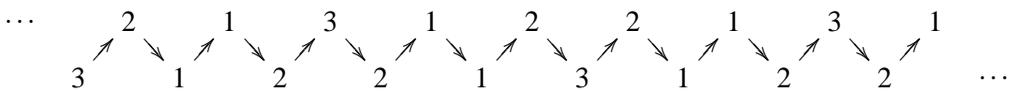


où $a = f(k-1, p)$, $b = f(k, p-1)$, $c = f(k-1, p+1)$ et $d = f(k, p)$, pour un $k \in \mathbb{Z}$ (qui fixe la diagonale passant par b et d) et un $p \in \mathcal{Q}_0$ (qui fixe la rangée contenant a et d). Remarquons qu'alors la définition de la fonction de frise peut s'exprimer de manière équivalente sous la forme d'un déterminant :

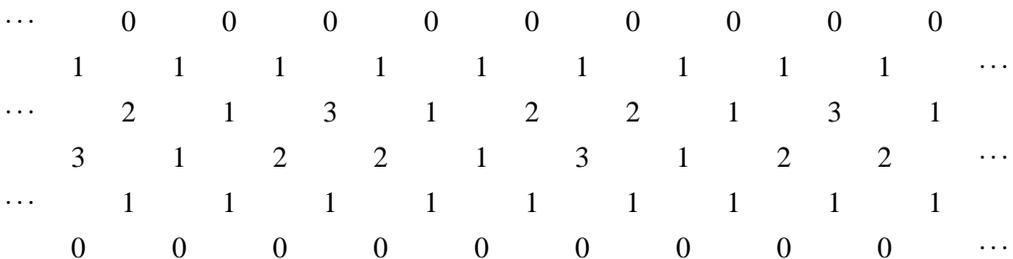
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

ce qui implique que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient au groupe spécial linéaire $SL_2(\mathbb{Z})$. Dans [CC73], cette propriété est appelée la **règle unimodulaire**. À partir d'une frise donnée, on peut utiliser la règle unimodulaire pour étendre la frise vers le haut et vers le bas. On peut vérifier que la première rangée ajoutée est formée de 1 et que la rangée au-dessus est formée de 0. De même, au bas de la frise, la première rangée ajoutée est formée de 1 et la rangée au-dessous est formée de 0.

Ainsi, la frise



devient



Il est à noter que ces rangées de 1 et de 0 ne font pas à proprement parler partie de la frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$. La fonction de frise permet de calculer sur les éléments du bord de la frise, alors que la règle unimodulaire ne permet de calculer que sur les mailles.

$$(2) a_{r,s} = \begin{vmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{vmatrix} = u_r v_s - u_s v_r = -(u_s v_r - u_r v_s) = - \begin{vmatrix} u_s & u_r \\ v_s & v_r \end{vmatrix} = -a_{s,r}$$

(3) Développons chaque terme de l'équation.

$$\begin{aligned} a_{r,s} a_{t,u} &= \begin{vmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_t & u_u \\ v_t & v_u \end{vmatrix} \\ &= (u_r v_s - u_s v_r)(u_t v_u - u_u v_t) \\ &= u_r u_t v_s v_u - u_s u_t v_r v_u - u_r u_u v_s v_t + u_s u_u v_r v_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{r,t} a_{u,s} &= \begin{vmatrix} u_r & u_t \\ v_r & v_t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_u & u_s \\ v_u & v_s \end{vmatrix} \\ &= (u_r v_t - u_t v_r)(u_u v_s - u_s v_u) \\ &= u_r u_u v_s v_t - u_t u_u v_r v_s - u_r u_s v_t v_u + u_s u_t v_r v_u \end{aligned}$$

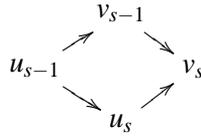
$$\begin{aligned} a_{r,u} a_{s,t} &= \begin{vmatrix} u_r & u_u \\ v_r & v_u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{vmatrix} \\ &= (u_r v_u - u_u v_r)(u_s v_t - u_t v_s) \\ &= u_r u_s v_t v_u - u_s u_u v_r v_t - u_r u_t v_s v_u + u_t u_u v_r v_s \end{aligned}$$

De là on voit que $a_{r,s} a_{t,u} + a_{r,t} a_{u,s} + a_{r,u} a_{s,t} = 0$.

$$(4) a_{-1,s} = \begin{vmatrix} u_{-1} & u_s \\ v_{-1} & v_s \end{vmatrix} = 0 \cdot v_s - u_s(-1) = u_s$$

$$(5) a_{0,s} = \begin{vmatrix} u_0 & u_s \\ v_0 & v_s \end{vmatrix} = 1 \cdot v_s - u_s \cdot 0 = v_s$$

(6) En effet, on a



$$d'où a_{s-1,s} = \begin{vmatrix} u_{s-1} & u_s \\ v_{s-1} & v_s \end{vmatrix} = u_{s-1} v_s - u_s v_{s-1} = 1.$$

(7) En effet,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{r-1,s} & a_{r,s} \\ a_{r-1,s+1} & a_{r,s+1} \end{vmatrix} &= a_{r-1,s} a_{r,s+1} - a_{r-1,s+1} a_{r,s} \\ &= a_{r-1,s} a_{r,s+1} + a_{r-1,s+1} a_{s,r} \text{ (propriété 2)} \\ &= -a_{r-1,r} a_{s+1,s} \text{ (propriété 3)} \\ &= a_{r-1,r} a_{s,s+1} \text{ (propriété 2)} \\ &= 1 \text{ (propriété 6).} \end{aligned}$$

La dernière propriété est l'expression de la règle unimodulaire appliquée à la partie de frise suivante.

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{-1,-1} & a_{0,0} & a_{1,1} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-1,n-1} & & \\
& a_{-1,0} & a_{0,1} & a_{1,2} & \dots & a_{n-2,n-1} & a_{n-1,n} & \\
& & a_{-1,1} & a_{0,2} & a_{1,3} & \dots & a_{n-2,n} & a_{n-1,n+1} \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
& & & & a_{-1,n} & a_{0,n+1} & a_{1,n+2} & \dots \\
& & & & & a_{-1,n+1} & a_{0,n+2} & a_{1,n+3} & \dots \\
& & & & & & a_{-1,n+2} & a_{0,n+3} &
\end{array}$$

Selon le lemme 3.12(4), $a_{-1,s} = u_s$ (pour $-1 \leq s \leq n+2$). Ainsi cette frise et la frise donnée plus haut ont une diagonale en commun. Mais puisqu'une frise est entièrement déterminée par une diagonale (proposition 3.10), ces frises sont identiques. En particulier, $d_s = a_{s-1,s+1}$ (pour $0 \leq s \leq n+1$).

Ces notations permettent d'établir les résultats suivants.

THÉORÈME 3.13. *Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs et soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors les éléments de la première rangée $d_0, d_1, \dots, d_n, d_{n+1}$ s'expriment en fonction des éléments de la diagonale $u_{-1}, u_0, \dots, u_{n+2}$ et, réciproquement, les éléments de la diagonale u_1, \dots, u_{n+2} s'expriment en fonction des éléments de la première rangée d_0, d_1, \dots, d_{n+1} .*

PREUVE. *Commençons par montrer que les éléments de la première rangée s'expriment en fonction de ceux de la diagonale.*

Comme $d_s = a_{s-1,s+1}$ (pour $0 \leq s \leq n+1$), on a

$$\begin{aligned}
a_{s-1,s+1}a_{-1,s} &= -a_{s-1,s}a_{s+1,-1} - a_{s-1,-1}a_{s,s+1} \text{ (propriété 3)} \\
&= a_{s-1,s}a_{-1,s+1} + a_{-1,s-1}a_{s,s+1} \text{ (propriété 2)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
d_s &= a_{s-1,s+1} \\
&= \frac{a_{s-1,s}a_{-1,s+1} + a_{-1,s-1}a_{s,s+1}}{a_{-1,s}} \\
&= \frac{1 \cdot u_{s+1} + u_{s-1} \cdot 1}{u_s} \text{ (propriétés 4 et 6)} \\
&= \frac{u_{s-1} + u_{s+1}}{u_s}
\end{aligned}$$

Montrons ensuite que les éléments de la diagonale s'expriment en fonction de ceux de la première rangée.

La preuve se fait par récurrence. Nous voulons montrer que, pour $1 \leq s \leq n+2$,

$$u_s = \begin{vmatrix} d_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{s-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{s-1} \end{vmatrix}.$$

Pour $s = 1$, $u_1 = a_{-1,1} = d_0$.

Soit $s > 1$. On suppose la formule vérifiée pour tout $r < s + 1$. Puisqu'on a montré ci-haut que $d_s = \frac{u_{s-1} + u_{s+1}}{u_s}$, on peut écrire $u_{s+1} = d_s u_s - u_{s-1}$. Ainsi, en vertu de l'hypothèse de récurrence,

$$u_{s+1} = d_s \begin{vmatrix} d_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{s-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{s-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{s-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{s-2} \end{vmatrix}.$$

C'est le développement selon la dernière ligne du déterminant suivant :

$$u_{s+1} = \begin{vmatrix} d_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{s-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_s \end{vmatrix}.$$

On peut généraliser cette dernière formule à tout élément de la frise.

COROLLAIRE 3.14. Pour $2 \leq s - r \leq n + 2$,

$$a_{r,s} = \begin{vmatrix} d_{r+1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & d_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{s-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-1} \end{vmatrix}$$

PREUVE. La définition de $a_{r,s}$ dépend d'une diagonale k fixée. Plaçons-nous sur la diagonale $k' = k + r + 1$. Alors on a $d'_i = f(k' + i, 1) = f(k + r + 1 + i, 1) = d_{r+1+i}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Alors $d'_{-1,s-r-1} = a_{r,s}$, d'où

$$\begin{aligned} a_{r,s} &= d'_{-1,s-r-1} = u'_{s-r-1} \text{ (lemme 3.12(4))} \\ &= \begin{vmatrix} d'_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & d'_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d'_{s-r-3} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d'_{s-r-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{r+1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & d_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{s-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque. Observons que la formule obtenue pour $a_{r,s}$ est l'expression du polynôme de Tchebychev généralisé $P_{s-r-2}(d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_{s-1})$ [Dup09, Corollaire 3.3].

On peut désormais établir des conditions suffisantes pour avoir une frise d'entiers positifs.

PROPOSITION 3.15. *Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$. Si une diagonale k de la frise est telle que*

$$(1) \ u_s \mid (u_{s-1} + u_{s+1})$$

$$(2) \ u_s > 0$$

pour $(0 \leq s \leq n+1)$, alors la frise ne contient que des entiers strictement positifs.

PREUVE. *On a alors,*

$$d_s = \frac{u_{s-1} + u_{s+1}}{u_s} \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Ainsi d_0, \dots, d_{n+1} sont entiers et strictement positifs. Donc les $a_{r,s}$ sont entiers, en vertu du corollaire 3.14, et tous les entiers de la frise sont strictement positifs, en vertu de la proposition 3.10.

4. Cycles polygonaux

La première rangée d'une frise d'entiers positifs respecte des propriétés particulières.

PROPOSITION 4.1. *Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs et soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors la suite $\{d_0, d_1, \dots\}$ est périodique de période $n+3$.*

PREUVE. *Pour $-1 \leq r \leq n+2$, on a $a_{r,r+n+3} = 0$ et $a_{r+1,r+n+3} = 1$.*

Or, en vertu du lemme 3.12(3),

$$a_{r,s}a_{r+1,r+n+3} + a_{r,r+1}a_{r+n+3,s} + a_{r,r+n+3}a_{s,r+1} = 0$$

mais

$$a_{r+1,r+n+3} = 1, \ a_{r,r+1} = 1 \text{ et } a_{r,r+n+3} = 0,$$

d'où

$$a_{r,s} + a_{r+n+3,s} = 0$$

et donc

$$a_{r,s} = a_{s,r+n+3}.$$

En appliquant cette dernière égalité à $a_{s,r+n+3}$, on obtient

$$a_{s,r+n+3} = a_{r+n+3,s+n+3},$$

d'où

$$a_{r,s} = a_{r+n+3,s+n+3}.$$

Donc, en particulier, $d_0 = a_{-1,1} = a_{n+2,n+4} = d_{n+3}$.

Remarque. Cela montre également que, pour toute frise d'entiers positifs, il existe une transvection et une translation qui fixent la frise.

DÉFINITION 4.2. Dans une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$, l'ensemble des éléments $\{d_0, d_1, \dots, d_{n+2}\}$ de la première rangée est appelé **cycle polygonal d'ordre $n+3$** . Notons qu'un cycle polygonal est nécessairement d'ordre $p \geq 4$, car $n \geq 1$.

Observons le fait suivant.

LEMME 4.3. *Un cycle polygonal contient au moins un 1.*

PREUVE. *Supposons au contraire que $d_s \geq 2$ pour tout $0 \leq s \leq n+2$.*

Or,

$$d_s = \frac{u_{s-1} + u_{s+1}}{u_s},$$

d'où

$$u_{s+1} = d_s u_s - u_{s-1} \geq 2u_s - u_{s-1}.$$

Ainsi, en soustrayant u_s de part et d'autre de l'inégalité, on obtient

$$u_{s+1} - u_s \geq u_s - u_{s-1} \geq \dots \geq u_1 - u_0 = d_0 - 1 > 0.$$

Donc la suite des u_s est strictement croissante, ce qui contredit $u_{n+1} = 1$.

Considérons une transformation inversible qui permet de passer d'une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ à une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{n+1}$.

THÉORÈME 4.4. *Soit $0 \leq i \leq n+2$. Il existe une transformation inversible \mathcal{T}_i de l'ensemble des cycles polygonaux d'ordre $n+3$ vers l'ensemble des cycles polygonaux d'ordre $n+4$.*

PREUVE. *Soit $\{d_0, d_1, \dots, d_{n+2}\}$ un cycle polygonal d'ordre $n+3$. Alors on définit*

$$\mathcal{T}_i: (\dots, d_{i-1}, d_i, d_{i+1}, d_{i+2}, \dots) \mapsto (\dots, d_{i-1}, d_i + 1, 1, d_{i+1} + 1, d_{i+2}, \dots).$$

Vérifions d'abord que le résultat de cette transformation est bien un cycle polygonal d'ordre $n+4$. Il suffit de montrer que la suite résultante forme la première rangée d'une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{n+1}$.

Prenons la suite $\{u_s\}$ des éléments de la diagonale passant par d_{i-1} . Alors, en vertu du théorème 3.13, on peut exprimer en fonction de $u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}$ les éléments

$$d_i = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{u_i} \quad \text{et} \quad d_{i+1} = \frac{u_i + u_{i+2}}{u_{i+1}}.$$

On a

$$d_i + 1 = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{u_i} + 1 = \frac{u_{i-1} + (u_i + u_{i+1})}{u_i},$$

$$1 = \frac{u_i + u_{i+1}}{u_i + u_{i+1}}$$

et

$$d_{i+1} + 1 = \frac{u_i + u_{i+2}}{u_{i+1}} + 1 = \frac{(u_i + u_{i+1}) + u_{i+2}}{u_{i+1}}.$$

Donc $u_i \mid u_{i-1} + (u_i + u_{i+1})$ et $u_{i+1} \mid (u_i + u_{i+1}) + u_{i+2}$, car $d_i + 1$ et $d_{i+1} + 1$ sont entiers. On en conclut que si la portion de la diagonale $(\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots)$ devient $(\dots, u_{i-1}, u_i, u_i + u_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots)$, cette nouvelle diagonale sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{n+1}$ respecte la condition $u_s \mid u_{s-1} + u_{s+1}$ et donc, en vertu de la proposition 3.15, définit une frise d'entiers positifs. Ceci montre que $(\dots, d_{i-1}, d_i + 1, 1, d_{i+1} + 1, d_{i+2}, \dots)$ est un cycle polygonal d'ordre $n+4$.

Il reste à montrer que \mathcal{T}_i admet un inverse S_i . Soit $\{d_0, d_1, \dots, d_{n+3}\}$ un cycle polygonal d'ordre $n+4$. En vertu du lemme 4.3, tout cycle polygonal contient au moins un 1. De plus, le lemme 3.11 implique que les voisins d'un 1 sont strictement plus grands que 1. On peut supposer, sans perte de généralité, que $d_{i+1} = 1$ et $d_i, d_{i+2} > 1$.

Ainsi, posons

$$S_i: (\dots, d_{i-1}, d_i, 1, d_{i+2}, d_{i+3}, \dots) \mapsto (\dots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+2} - 1, d_{i+3}, \dots).$$

Il faut montrer que le résultat est bien un cycle polygonal d'ordre $n + 3$. Comme plus haut, il suffit de montrer que la suite résultante forme la première rangée d'une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$.

Prenons la suite $\{u_s\}$ des éléments de la diagonale passant par d_i . Alors on a, en vertu du théorème 3.13,

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{u_i}, \\ d_{i+1} &= \frac{u_i + u_{i+2}}{u_{i+1}}, \\ d_{i+2} &= \frac{u_{i+1} + u_{i+3}}{u_{i+2}}. \end{aligned}$$

Mais $d_{i+1} = 1$ implique que $u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} d_i - 1 &= \frac{u_{i-1} + u_{i+1} - u_i}{u_i} = \frac{u_{i-1} + u_{i+2}}{u_i}, \\ d_{i+2} - 1 &= \frac{u_{i+1} + u_{i+3} - u_{i+2}}{u_{i+2}} = \frac{u_i + u_{i+3}}{u_{i+2}}. \end{aligned}$$

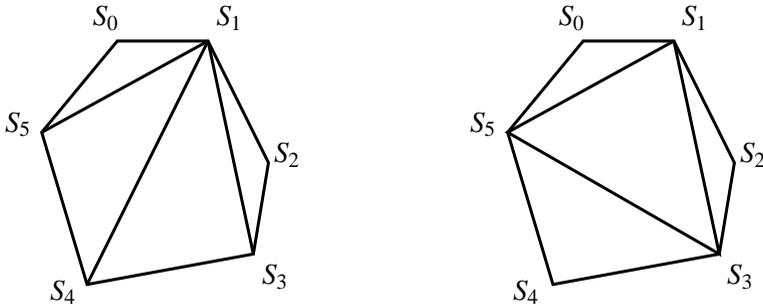
Puisque $d_i - 1$ et $d_{i+2} - 1$ sont entiers, alors $u_i \mid u_{i-1} + u_{i+2}$ et $u_{i+2} \mid u_i + u_{i+3}$. On en conclut que si la portion de la diagonale $(\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots)$ devient $(\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots)$, cette nouvelle diagonale sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ respecte la condition $u_s \mid u_{s-1} + u_{s+1}$ et donc, en vertu de la proposition 3.15, définit une frise d'entiers positifs. Ceci montre que $(\dots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+2} - 1, d_{i+3}, \dots)$ est un cycle polygonal d'ordre $n + 3$.

Il est immédiat que S_i est l'inverse de \mathcal{T}_i .

Remarque. Ce théorème permet d'affirmer que tout cycle polygonal peut être obtenu à partir d'un cycle polygonal d'ordre inférieur. Ainsi, tout cycle polygonal est engendré par des applications successives de transformations \mathcal{T}_i au cycle polygonal $\{1, 2, 1, 2\}$ correspondant à l'unique frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_1$ (voir l'exemple 3.6).

5. Triangulations

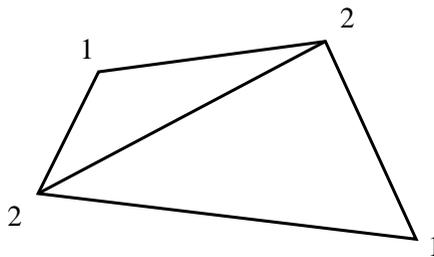
Nous noterons S_0, S_1, \dots, S_{p-1} les sommets d'un polygone à p côtés. Pour nos besoins, un polygone n'est pas nécessairement régulier, mais il doit être convexe. On appelle **triangulation** d'un polygone à p côtés tout découpage en $p - 2$ triangles de ce polygone par $p - 3$ diagonales non sécantes [CC73]. Par exemple, voici deux triangulations d'un hexagone :



Étant donné une triangulation d'un polygone à p côtés, soit i tel que $0 \leq i \leq p - 1$. On note Δ_i le nombre de triangles ayant S_i pour sommet. Nous nous intéresserons à la suite $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$. Ainsi, deux triangulations qui, par une numérotation appropriée des sommets, peuvent engendrer la même suite seront considérées équivalentes.

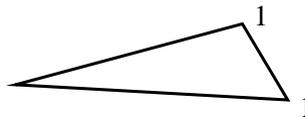
LEMME 5.1. Si $p \geq 4$, alors il existe i, j distincts, tels que $\Delta_i = \Delta_j = 1$. En outre, S_i n'est pas adjacent à S_j .

PREUVE. On le voit facilement en envisageant une triangulation comme une construction où l'on juxtapose successivement des triangles. Si $p = 4$, on voit que l'énoncé est vrai.

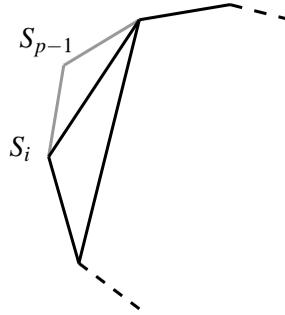


Supposons $p > 4$ et l'énoncé vrai pour $p - 1$, alors toute triangulation d'un polygone à $p - 1$ côtés est telle que $\Delta_i = \Delta_j = 1$ pour certains i, j distincts.

Considérons un polygone à p côtés. Supposons que le sommet S_i est adjacent au sommet S_j . Alors ces deux sommets font partie du même triangle et déterminent un de ses côtés. Puisque $\Delta_i = \Delta_j = 1$, cela veut dire que les deux autres côtés du triangle ne touchent à aucun autre triangle.



Donc le polygone considéré est nécessairement un triangle, ce qui contredit $p > 4$. Ainsi, il est impossible d'ajouter un seul triangle qui modifie à la fois Δ_i et Δ_j . On peut donc distinguer deux cas. Si l'ajout du triangle ne modifie ni Δ_i , ni Δ_j , on a toujours $\Delta_i = \Delta_j = 1$. Ainsi supposons, sans perte de généralité, que le triangle ajouté modifie Δ_i . Alors le sommet S_{p-1} ajouté au polygone est seulement adjacent à ce triangle.



Donc $\Delta_{p-1} = \Delta_j = 1$ avec $p - 1$ et j distincts.

Nous en arrivons au théorème principal.

THÉORÈME 5.2. *Les cycles polygonaux d'ordre p sont en bijection avec les triangulations d'un polygone à p côtés.*

PREUVE. Soit $\{d_0, \dots, d_{p-1}\}$ un cycle polygonal d'ordre p . On veut lui associer une triangulation d'un polygone à p côtés. Montrons par récurrence que $(d_0, d_1, \dots, d_{p-1}) = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$. Si $p = 4$, l'unique cycle polygonal d'ordre 4 (voir l'exemple 3.6) correspond à la triangulation d'un quadrilatère. Autrement dit,

$$(d_0, d_1, d_2, d_3) = (1, 2, 1, 2) = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Soient $p > 4$ et $\{d_0, d_1, \dots, d_{p-1}\}$ un cycle polygonal d'ordre p . En vertu du lemme 4.3, on peut supposer, sans perte de généralité, que $d_{p-1} = 1$. Selon le théorème 4.4,

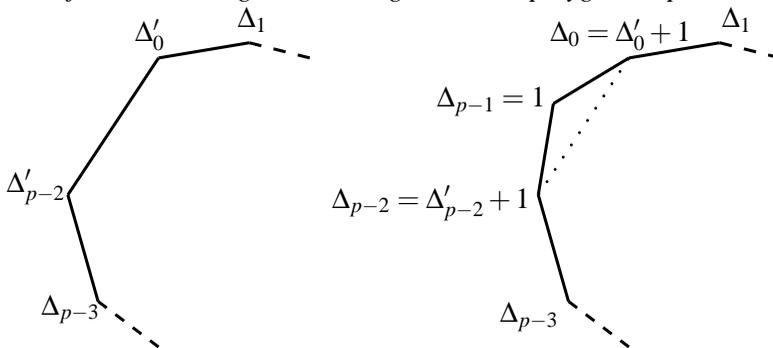
$$S_{p-2}(d_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d_{p-2}, d_{p-1}) = (d'_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2})$$

est un cycle polygonal d'ordre $p - 1$, où $d'_0 = d_0 - 1$ et $d'_{p-2} = d_{p-2} - 1$. Ainsi, en vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une triangulation d'un polygone à $p - 1$ côtés telle que $(\Delta'_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-3}, \Delta'_{p-2}) = (d'_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2})$.

La transformation inverse

$$\mathcal{T}_{p-2}(d'_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2}) = (d'_0 + 1, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2} + 1, 1) = (d_0, d_1, \dots, d_{p-1})$$

correspond à l'ajout d'un triangle à la triangulation du polygone à $p - 1$ côtés.



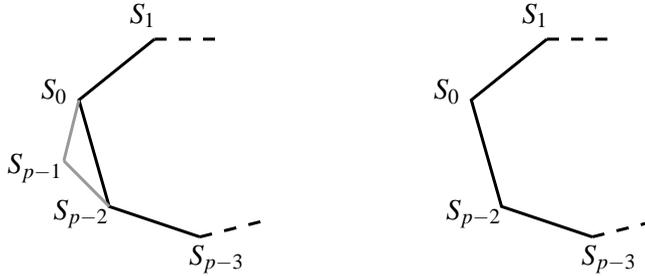
Le côté $\overline{S_0 S_{p-2}}$ du polygone à $p - 1$ côtés devient une diagonale de la triangulation du polygone à p côtés pour laquelle on a

$$(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1}) = (\Delta'_0 + 1, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-3}, \Delta'_{p-2} + 1, \Delta_{p-1})$$

et $(d_0, d_1, \dots, d_{p-1}) = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$, selon la définition de \mathcal{T}_{p-2} .

Réciproquement, montrons que si on a une triangulation d'un polygone à p côtés, alors il existe un cycle polygonal d'ordre p tel que $(d_0, d_1, \dots, d_{p-1}) = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$.

La preuve se fait par récurrence. Si $p = 4$, la triangulation du quadrilatère correspond à un cycle polygonal d'ordre 4. Soit $p > 4$. Considérons une triangulation d'un polygone à p côtés. En vertu du lemme 5.1, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\Delta_{p-1} = 1$, alors $\Delta_0 > 1$ et $\Delta_{p-2} > 1$. On veut montrer que $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$ est un cycle polygonal d'ordre p . En retirant le triangle $S_0S_{p-1}S_{p-2}$, c'est-à-dire les côtés S_0S_{p-1} et $S_{p-1}S_{p-2}$, on se ramène à une triangulation d'un polygone à $p - 1$ côtés pour laquelle $\Delta'_0 = \Delta_0 - 1$ et $\Delta'_{p-2} = \Delta_{p-2} - 1$.



Or, en vertu de l'hypothèse de récurrence,

$$(\Delta'_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-3}, \Delta'_{p-2}) = (d'_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2})$$

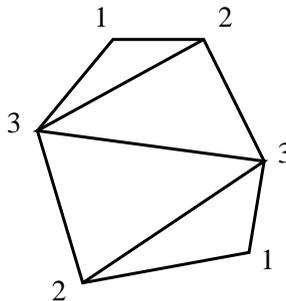
est un cycle polygonal d'ordre $p - 1$. Donc

$$\mathcal{T}_{p-2}(d'_0, d_1, \dots, d'_{p-2}) = (d'_0 + 1, d_1, \dots, d'_{p-2} + 1, 1) = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$$

est, selon la définition de \mathcal{T}_{p-2} , un cycle polygonal d'ordre p .

COROLLAIRE 5.3. Les frises d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ sont en bijection avec les triangulations d'un polygone à $n + 3$ côtés. □

EXEMPLE 5.4. Cette triangulation d'un hexagone correspond à la frise de l'exemple 3.8.



EXEMPLE 5.5. Cette triangulation d'un enneagone correspond à la frise de l'exemple 3.9.

JEAN-SÉBASTIEN FRASER MARTINEAU, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE
SHERBROOKE

Courriel: jean-sebastien.fraser.martineau@usherbrooke.ca

DOMINIQUE LAVERTU, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: dominique.lavertu@usherbrooke.ca