CaMUS 1 (2010), 32–38

La visualisation de la sphère de dimension trois

Rosemonde Lareau-Dussault

Résumé. Le but de cet article est de décrire la sphère de dimension trois et de donner différentes façons de la visualiser. En particulier, on présentera sa projection stéréographique.

1. Introduction

Nos sens nous permettent de facilement percevoir et imaginer des objets de trois dimensions et moins. Par contre, en géométrie, on peut travailler avec des objets et des espaces de plus de trois dimensions.

Dans le cadre de cet article, je vais introduire la sphère de dimension trois, définie dans $\mathbb{R}^4$.

Tout d'abord, je vais proposer des définitions de la sphère de dimension trois. Ensuite, je vais donner des façons de la concevoir. Finalement, je vais expliciter une projection stéréographique qui nous donnera une bijection de cette sphère vers $\mathbb{R}^3$.

2. Définitions

En général, une sphère de dimension n est, dans un espace de $n+1$ dimensions, l'ensemble des points situés à une distance constante (le rayon) d'un point (le centre). Une sphère de dimension n est dite unitaire, et se note S^n, si elle est centrée à l'origine et qu'elle a un rayon de une unité. En particulier, la sphère de dimension un, $\mathcal{S}$, est communément appelée un « cercle » et la sphère de dimension deux, $\mathcal{S}^2$, « sphère ». Ce sont les sphères les plus connues étant donné que l'on perçoit facilement trois dimensions spatiales.

Le cercle est la sphère de dimension un, bien que l'on nécessite deux dimensions pour apprécier l'ensemble de ses propriétés. Cela est dû au fait qu'un cercle peut être exprimé à l'aide d'une seule variable, par exemple, en utilisant

Je tiens à remercier le CRSNG ainsi que Virginie Charette pour leur appui financier. J'aimerais aussi remercier Virginie Charette pour son soutien et sa disponibilité.

les coordonnées polaires $S = \left\{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R}\right\}$. De même, la sphère de dimension deux ne nécessite que deux variables pour être décrite.

La *sphère de dimension trois* est donc, dans un espace à quatre dimensions, l'ensemble des points situés à une distance constante d'un centre que l'on notera :

$$\mathcal{S}^3 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = 1\right\}.$$

En utilisant des coordonnées *hypersphèriques*, on peut décrire $\mathcal{S}^3$ avec trois variables, comme suit :

$$\mathcal{S}^3 = \{(\cos\varphi, cos\phi \sin\theta \sin\varphi, \sin\phi \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi)\}$$

où $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$.

3. Description de $\mathcal{S}^3$

Pour que le lecteur puisse se faire une image mentale de $\mathcal{S}^3$, je vais utiliser une analogie présentée dans le livre Flatland [**1**]. Nous allons étudier les sphères de dimensions inférieures, pour ensuite donner une façon de concevoir la sphère de dimension trois.

3.1. La sphère de dimension un, vue de $\mathbb{R}$

Supposons que vous vivez dans un monde unidimensionnel, c'est-à-dire dans un monde n'ayant besoin que d'une variable pour être décrit. Par exemple, vous pourriez être un point sur la droite réelle. Il serait alors difficile pour vous, point, de visualiser un cercle, étant donné que le cercle est contenu dans $\mathbb{R}^2$ (voir figure 1).

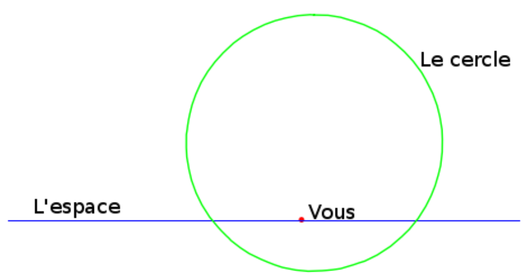

FIGURE 1. Exemple en une dimension

Dans ce contexte, vous ne pourriez voir que deux points du cercle à la fois. Lorsque le cercle est tangent à votre droite-espace, vous n'en voyez qu'un point et ce point disparaît selon votre point de vue lorsque le cercle s'éloigne de votre droite-espace.

3.2. La sphère de dimension deux, vue de $\mathbb{R}^2$

Pour poursuivre l'analogie avec la sphère de dimension deux, il faut se mettre dans la peau d'un objet de dimension deux vivant, par exemple, dans un plan. Il est alors impossible pour vous de visualiser $\mathcal{S}^2$ au complet étant donné que $\mathcal{S}^2$ est contenue dans $\mathbb{R}^3$.

Supposons qu'une sphère de dimension deux traverse un plan. On verra d'abord un point apparaître, puis un cercle qui grossira jusqu'à atteindre le rayon de la sphère, puis qui rétrécit. Ainsi, vous ne pouvez voir qu'une tranche de la sphère à la fois, soit un cercle. Le rayon du cercle est plus ou moins grand selon la distance entre le centre de la sphère et le plan dans lequel vous êtes. Le rayon est maximal lorsque le plan le tranche à l'équateur. À l'extrême, vous ne voyez qu'un point, et ce point disparaîtra si le centre de la sphère est plus loin du plan que le rayon de la sphère (voir figure 2).

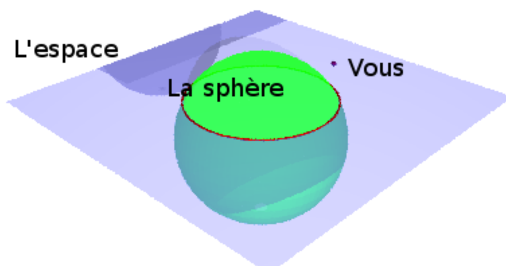

Figure 2. Exemple en deux dimensions

3.3. La sphère de dimension trois, vue de $\mathbb{R}^3$

Supposons maintenant qu'une sphère de dimension trois « traverse » l'espace. On verra d'abord un point, puis une sphère grossir jusqu'à atteindre le rayon de la sphère de dimension trois, puis se contracter jusqu'à redevenir un point, puis disparaître (voir figure 3).

Vous pouvez donc voir des « tranches » de $\mathcal{S}^3$, c'est-à-dire des sphères de dimension deux. Plus le centre de la sphère de dimension trois que vous observez est proche de l'espace dans lequel vous vous trouvez, plus la sphère de dimension deux que vous voyez est grosse. Si le centre de $\mathcal{S}^3$ est à une distance égale à son rayon de votre espace, cette sphère vous semble un point, mais si elle est plus loin que son rayon, vous ne la voyez pas.

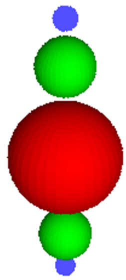

FIGURE 3. $\mathcal{S}^3$ traverse $\mathbb{R}^3$

3.4. $\mathcal{S}^3$ comme réunion de deux boules

Une autre façon d'imaginer $\mathcal{S}^3$ est de coller deux « boules » par leurs frontières. D'abord, notons que l'on peut représenter la sphère de dimension deux comme étant deux disques collés l'un à l'autre le long de leurs frontières. Pour ce faire, on prend deux disques dans $\mathbb{R}^3$. Supposons-les dans le plan x, y. On « pousse » l'intérieur de ces disques le long de l'axe des z, un dans le sens croissant (voir figure 4), et l'autre décroissant. En superposant les frontières de ces disques, on obtient $\mathcal{S}^2$.

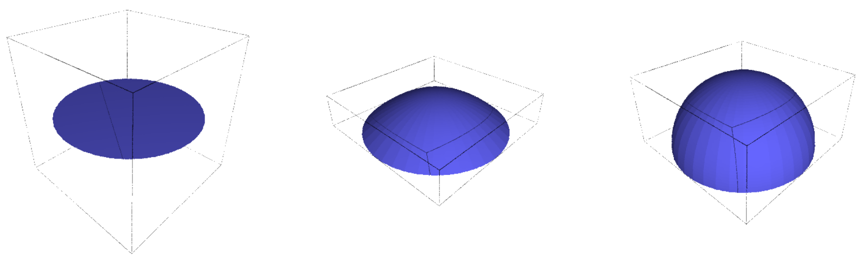

FIGURE 4. Un disque « poussé » dans le sens croissant de l'axe des z

On peut de la même façon décrire $\mathcal{S}^3$ comme étant deux boules collées l'une à l'autre le long de leurs frontières. Pour ce faire, on prend deux boules dans $\mathbb{R}^4$. Supposons-les dans l'espace x, y, z. On « pousse » l'intérieur de ces boules le long de l'axe des w, un dans le sens croissant, et l'autre décroissant. En superposant les frontières de ces boules, on obtient $\mathcal{S}^3$.

4. Projection stéréographique

Une projection stéréographique de $\mathcal{S}^n$ est une fonction de $\mathcal{S}^n$, auquel on soustrait un point, vers $\mathbb{R}^n$. Généralement, on soustrait un des pôles de $\mathcal{S}^n$. Dans le cadre de cet article, nous soustrairons le pôle sud, *PS*.

Nous allons encore une fois commencer par définir et illustrer une projection stéréographique dans les deux cas qui nous sont les plus intuitifs, soit pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^2$. Ensuite, il nous sera possible d'expliciter une projection stéréographique de $\mathcal{S}^3$ vers $\mathbb{R}^3$.

4.1. Projection stéréographique de $\mathcal{S}$

Dans le cas d'un cercle, une projection stéréographique est une fonction qui envoie $S\backslash PS$ vers $\mathbb{R}$. Pour cette fonction, on définit un point particulier du cercle, par exemple, le pôle sud $PS = (0, -1)$, et une droite particulière du plan, par exemple, la droite $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 1\right\}$ qui sera l'image de la fonction. Ensuite, pour trouver l'image d'un point quelconque du cercle $P = (x, y)$, on trace l'unique droite D' passant par P et par PS. La projection de P est l'intersection de D et de D', notée P' (voir figure 5).

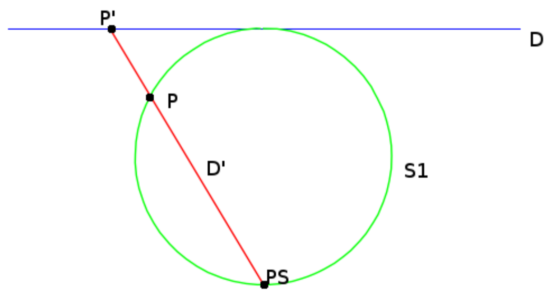

FIGURE 5. La projection stéréographique de $\mathcal{S}$

Dans le cas particulier que nous venons de décrire, la projection stéréographique est représentée par la fonction $f : \mathcal{S}\backslash PS \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \dfrac{x}{y+1}$.

On aurait pu appliquer le même principe avec n'importe quel point du cercle au lieu de PS et n'importe quelle droite de $\mathbb{R}^2$ au lieu de D.

Une façon de voir cette projection est de « dérouler » le cercle le long de $\mathbb{R}$.

4.2. Projection stéréographique de $\mathcal{S}^2$

Pour ce qui est de la projection stéréographique de S^2, on se fixe un point de projection, par exemple le pôle nord $PN = (0, 0, 1)$ et un plan de projection, par exemple $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = -1\right\}$. Ensuite, on trace une droite en suivant le même principe que pour la projection de $\mathcal{S}$ et on trouve que l'image du point P est $P' \in D$ (voir figure 6).

On peut encore imaginer que l'on « déroule » la sphère sur le plan.

Une différence majeure est qu'on utilise un plan de projection au lieu d'une droite de projection. En général, on projette $\mathcal{S}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

La projection du pôle sud vers $(x, y, 1)$ peut être donnée explicitement par la formule $f : \mathcal{S}^2\backslash PN \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right)$.

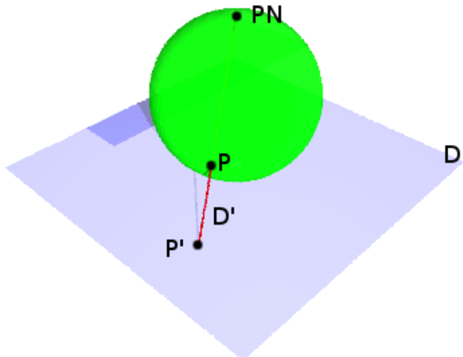

FIGURE 6. La projection stéréographique de $\mathcal{S}^2$

4.3. Projection stéréographique de $\mathcal{S}^3$

On arrive donc à ce qui nous intéresse le plus, soit la projection stéréographique de $\mathcal{S}^3$. On utilise le même procédé que pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^2$, c'est-à-dire, on définit un point de projection, par exemple, $PS = (0, 0, 0, -1)$ et un espace de dimension trois de projection, par exemple, $(x, y, z, 1)$. Ensuite, on trace une droite passant par notre point de projection et par le point que l'on veut projeter. La projection de notre point est l'intersection de cette droite et de $(x, y, z, 1)$.

Cette projection est donnée explicitement par la formule $f : \mathcal{S}^3 \backslash PS \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z, w) = \left(\dfrac{x}{1+w}, \dfrac{y}{1+w}, \dfrac{z}{1+w}\right)$.

On a donc une bijection de $\mathcal{S}^3 \backslash PS$ vers $\mathbb{R}^3$. Muni de cette bijection, on peut visualiser les valeurs d'une fonction de $\mathcal{S}^3$ avec « seulement » trois dimensions. Par contre, cette bijection déforme la sphère de dimension trois, c'est-à-dire qu'elle modifie les angles.

4.4. La sphère de dimension trois, vue à l'aide de la projection stéréographique

Si on considère la projection d'une sphère de dimension trois définie en coordonnées hypersphériques $\mathcal{S}^3 = \{(\cos\varphi, cos\phi \sin\theta \sin\varphi, \sin\phi \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi)\}$, alors on perçoit, lorsque ϕ varie, que la projection tourne autour de l'abscisse. Lorsque φ varie, on voit une sphère qui grossit et qui rétrécit (comme à la figure 3) et lorsque θ varie, on voit un ellipsoïde grossissant jusqu'à devenir une sphère (voir figure 7).

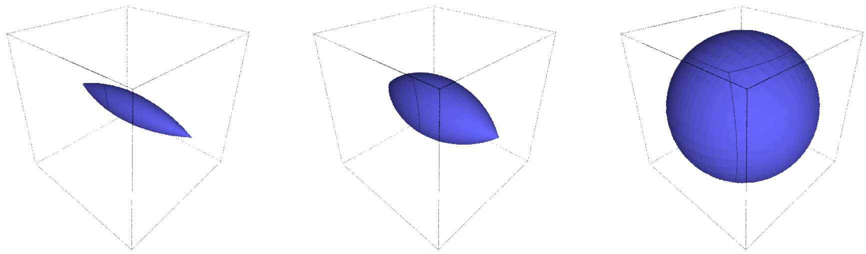

Figure 7. $\mathcal{S}^2$ traverse $\mathbb{R}^2$

Références

[1] Edwin A. Abbott. *Flatland*. Seely Co., 1884.

Rosemonde Lareau-Dussault, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke

Courriel: `r.lareau@usherbrooke.ca`